

**Prova scritta di**  
**ANALISI MATEMATICA III - AA 12/13**

16 gennaio 2013

**1.** Sia  $E$  la regione compatta racchiusa dal paraboloide  $\Pi_1$  di equazione  $z = x^2 + y^2$  e dal paraboloide  $\Pi_2$  di equazione  $z = 1 - (x - 1)^2 - y^2$ . Si usi il teorema della divergenza per calcolare il flusso del campo di vettori

$$F(x, y, z) := \left( xy, x - \frac{y^2}{2}, z \right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

uscente dalla frontiera di  $E$ .

**2.** Siano  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  i paraboloidi definiti nell'esercizio 1. Calcolare

$$\int_{\Pi_1 \cap \Pi_2} (1 + 4y^2 + x - z)^{1/2} d\mathcal{H}^1(x, y, z).$$

**3.** Determinare  $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$  tale che la funzione

$$u(x, y) := y\varphi(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

sia armonica e soddisfi  $u(1, 1) = 2$ ,  $u(0, 1) = 0$ . Determinare un'armonica coniugata di  $u$ .