Analisi Matematica III
per il Corso di Laurea in Matematica
(a.a. 2013/14)
DIARIO

Silvano Delladio

December 21, 2013

Contents

CHAPTER 1

Teoria della misura

[* Prima settimana (16/09/2013); 6 *]

1. Misure esterne, prime proprietà

Definizione 1.1. *Una "misura esterna" sull'insieme X è una mappa $\varphi : 2^X \to [0, +\infty]$ tale che*

(i) $\varphi(\emptyset) = 0$*;*
(ii) $\varphi(E) \leq \varphi(F)$*, se* $E \subset F \subset X$*;*
(iii) $\varphi(\cup_j E_j) \leq \sum_j \varphi(E_j)$*, se* $\{E_j\}$ *è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di* X*.*

Esempio 1.1. $X \neq \emptyset$ e

$$\varphi(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } E = \emptyset \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esempio 1.2. $X \neq \emptyset$ e $(x_0 \in X)$

$$\varphi(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 \notin E \\ 1 & \text{se } x_0 \in E. \end{cases}$$

Esempio 1.3. $X \neq \emptyset$ e $\varphi(E) := \#(E)$.

Osservazione 1.1. La cosiddetta "misura esterna di Peano-Jordan" non è una misura esterna. A maggior ragione non lo è la misura di Peano-Jordan.

Definizione 1.2. *Un insieme $E \in 2^X$ è detto "misurabile (rispetto alla misura esterna φ su X)" se*

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c) \tag{1.1}$$

per ogni $A \in 2^X$. La famiglia degli insiemi misurabili rispetto a φ è indicata con $\mathcal{M}_\varphi$.

Osservazione 1.2. Grazie a (iii) di Definizione 1.1, la (1.1) si può sostituire con

$$\varphi(A) \geq \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c).$$

Esempio 1.4. Negli esempi 1.1, 1.2, 1.3 si ha rispettivamente

$$\mathcal{M}_\varphi = \{\emptyset, X\}, \qquad \mathcal{M}_\varphi = 2^X, \qquad \mathcal{M}_\varphi = 2^X.$$

Teorema 1.1 (***). *Per una misura esterna φ su X, valgono i seguenti fatti:*

(1) $\mathcal{M}_\varphi$ *è c-chiusa;*
(2) *Se* $E \in 2^X$ *è tale che* $\varphi(E) = 0$*, allora* $E \in \mathcal{M}_\varphi$*. In particolare* $\emptyset \in \mathcal{M}_\varphi$ *(quindi anche* $X \in \mathcal{M}_\varphi$*);*
(3) *Se* $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M}_\varphi$*, allora* $\cap_{j=1}^n E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ *(quindi anche* $\cup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{M}_\varphi$*);*
(4) *Se* $\{E_j\}$ *è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a-due-a-due disgiunti, allora* $S := \cup_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ *(quindi anche* $\cap_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$*) e inoltre si ha*
$$\varphi(A) \geq \sum_j \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap S^c)$$
per ogni $A \in 2^X$*;*
(5) *(Additività numerabile) Se* $\{E_j\}$ *è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a-due-a-due disgiunti, si ha* $\varphi(\cup_j E_j) = \sum_j \varphi(E_j)$*.*

Definizione 1.3. *Una famiglia non vuota* $\Sigma \subset 2^X$ *è detta "σ-algebra (in X)" se gode delle seguenti proprietà:*

(i) *Se* $E \in \Sigma$*, allora* $E^c \in \Sigma$*;*
(ii) *Se* $\{E_j\}$ *è una famiglia numerabile di insiemi di* Σ*, si ha* $\cup_j E_j \in \Sigma$*.*

Osservazione 1.3. Se Σ è una σ-algebra in X, allora:

(1) $\emptyset, X \in \Sigma$;
(2) Σ è chiusa rispetto all'operazione di intersezione numerabile.

Esempio 1.5. $X := \mathbb{N}$ e $\Sigma := \{E \in 2^X \mid \#(E) < \infty \text{ oppure } \#(E^c) < \infty\}$. Allora la famiglia Σ è c-chiusa ma non è chiusa rispetto all'unione numerabile.

Esempio 1.6. Sia X un qualsiasi insieme. Allora 2^X e $\{\emptyset, X\}$ sono entrambe σ-algebre.

Esempio 1.7. $X := [0,1]$ e $\Sigma := \{E \in 2^X \mid \#(E) \leq \aleph_0 \text{ oppure } \#(E^c) \leq \aleph_0\}$. In questo caso Σ è una σ-algebra.

Osservazione 1.4. Sia data una misura esterna φ su X e sia $\{E_j\}$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili. Poniamo $A_1 := E_1$ e
$$A_n := E_n - \cup_{j=1}^{n-1} E_j = E_n - \cup_{j=1}^{n-1} A_j \qquad (n = 2, 3, \dots).$$
Allora $\{A_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a-due-a-due disgiunti e si ha
$$\cup_{j=1}^n A_j = \cup_{j=1}^n E_j \text{ (per ogni } n), \qquad \cup_j A_j = \cup_j E_j.$$

Proposizione 1.1 (*). *Se* φ *è una misura esterna su* X*, allora* $\mathcal{M}_\varphi$ *è una σ-algebra.*

Teorema 1.2 (**). *Se* φ *è una misura esterna su* X*, valgono le seguenti proprietà:*

(1) *(Continuità dal basso) Se* $\{E_j\}$ *è una famiglia numerabile e crescente di insiemi misurabili, si ha* $\varphi(\cup_j E_j) = \lim_j \varphi(E_j)$*.*
(2) *(Continuità dall'alto) Sia* $\{E_j\}$ *è una famiglia numerabile e decrescente di insiemi misurabili, con* $\varphi(E_1) < \infty$*. Allora* $\varphi(\cap_j E_j) = \lim_j \varphi(E_j)$*.*

Osservazione 1.5. Se in (2) di Teorema 1.2 non si assume l'ipotesi $\varphi(E_1) < \infty$, la tesi può fallire. Per esempio, se $X := \mathbb{N}$ con $\varphi(E) := \#(E)$, possiamo considerare la famiglia degli $E_j := \{j, j+1, \dots\}$. In tal caso si ha $\cap_j E_j = \emptyset$ e quindi $\varphi(\cap_j E_j) = 0$, mentre $\varphi(E_j) = \infty$ per ogni j.

2. Misure esterne metriche, Boreliane, Borel-regolari, di Radon

Definizione 2.1. *Una misura esterna su uno spazio metrico (X, d) è detta "di Carathéodory" (oppure "metrica") se*

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

per ogni coppia di insiemi $A, B \in 2^X$ tale che

$$dist(A, B) := \inf\{d(a, b) \,|\, a \in A, b \in B\} > 0.$$

[* Seconda settimana (23/09/2013); 12 *]

Teorema 2.1 (***). *Sia φ una misura esterna di Carathéodory su uno spazio metrico (X, d). Allora ogni sottoinsieme chiuso di X è misurabile.*

Osservazione 2.1. Si può provare che vale anche il "viceversa" di Teorema 2.1: Se φ è una misura esterna su uno spazio metrico (X, d) e se ogni sottoinsieme chiuso di X è misurabile, allora φ è di Carathéodory ([**11**, Theorem 1.7]).

Proposizione 2.1 (*). *Sia dato $\mathcal{I} \subset 2^X$ e indichiamo con $\mathcal{A}_\mathcal{I}$ la famiglia delle σ-algebre in X contenti $\mathcal{I}$. Allora*

$$\Sigma(\mathcal{I}) := \cap_{\Sigma \in \mathcal{A}_\mathcal{I}} \Sigma$$

è una σ-algebra in X. Essa è detta "la σ-algebra generata da $\mathcal{I}$".

Proposizione 2.2 (**). *Sia X uno spazio topologico e indichiamo con $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, rispettivamente, la famiglia degli insiemi compatti, la famiglia degli insiemi chiusi e la famiglia degli insiemi aperti di X. Allora:*

(1) *Si ha $\Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$;*
(2) *Se X è uno spazio di Hausdorff, vale l'inclusione $\Sigma(\mathcal{K}) \subset \Sigma(\mathcal{F})$;*
(3) *Se (X, d) è uno spazio metrico separabile, si ha $\Sigma(\mathcal{K}) = \Sigma(\mathcal{G})$ (dimostrato nel caso particolare dello spazio Euclideo; per una trattazione del caso generale si può vedere [**12**]).*

Osservazione 2.2. In uno spazio topologico che non sia metrico e separabile può effettivamente accadere che $\Sigma(\mathcal{K}) \neq \Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$. Si consideri per esempio $[0, 1]$ con la topologia discreta e cioè $\mathcal{G} = 2^{[0,1]}$. Osserviamo che $\mathcal{K}$ coincide con la famiglia dei sottoinsiemi finiti di $[0, 1]$. Se consideriamo la σ-algebra

$$\Sigma_0 := \{E \in 2^X \,|\, \#(E) \le \aleph_0 \text{ oppure } \#(E^c) \le \aleph_0\}$$

introdotta in Esempio 1.7, si ha $\Sigma(\mathcal{K}) \subset \Sigma_0 \subset 2^{[0,1]}$. Inoltre, evidentemente, vale $\Sigma_0 \neq 2^{[0,1]} = \mathcal{G} = \Sigma(\mathcal{G})$.

DEFINIZIONE 2.2. *Siano X uno spazio topologico, φ una misura esterna su X e $\mathcal{M}_\varphi$ la σ-algebra degli insiemi misurabili rispetto a φ. Allora:*

(i) *La σ-algebra $\Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$ viene indicata con $\mathcal{B}(X)$ e i suoi elementi sono detti "insiemi Boreliani";*
(ii) *φ è detta "Boreliana" (oppure "di Borel") se $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\varphi$;*
(iii) *φ è detta "Borel regolare" se è Boreliana e se inoltre per ogni insieme $A \in 2^X$ esiste $B \in \mathcal{B}(X)$ tale che $B \supset A$ e $\varphi(B) = \varphi(A)$;*
(iv) *φ è detta "di Radon" se è Borel regolare e se $\varphi(K) < \infty$ per ogni insieme compatto K in X.*

Da Teorema 2.1 segue subito il seguente risultato.

COROLLARIO 2.1 (°). *Ogni misura esterna di Carathéodory su uno spazio metrico è Boreliana.*

LEMMA 2.1 (°). *Consideriamo uno spazio topologico X e sia $\mathcal{D} \subset 2^X$ tale che:*

(i) *$\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{D}$;*
(ii) *$\mathcal{D}$ è chiuso rispetto all'unione numerabile e rispetto all'intersezione numerabile.*

Allora $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{D}$.

TEOREMA 2.2 (***). *Sia φ una misura esterna Boreliana su uno spazio metrico (X, d) e sia $B \in \mathcal{B}(X)$. Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se $\varphi(B) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme chiuso F tale che $F \subset B$ e $\varphi(B - F) \leq \varepsilon$;*
(2) *Se $B \subset \cup_{j=1}^{\infty} V_j$, dove i V_j sono insiemi aperti tali che $\varphi(V_j) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme aperto $G \supset B$ tale che $\varphi(G - B) \leq \varepsilon$.*

COROLLARIO 2.2 (**). *Sia φ una misura esterna Borel regolare su uno spazio metrico (X, d) e sia $E \in \mathcal{M}_\varphi$. Si verificano i seguenti fatti:*

(1) *Se $\varphi(E) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme chiuso F tale che $F \subset E$ e $\varphi(E - F) \leq \varepsilon$;*
(2) *Se $E \subset \cup_{j=1}^{\infty} V_j$, dove i V_j sono insiemi aperti tali che $\varphi(V_j) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme aperto $G \supset E$ tale che $\varphi(G - E) \leq \varepsilon$.*

TEOREMA 2.3 (**). *Si consideri la funzione $\mathcal{L}^n : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$ definita da*

$$\mathcal{L}^n(E) := \inf \Big\{ \sum_j v(I_j) \,\Big|\, \{I_j\} \in \mathcal{R}(E) \Big\} \qquad (E \subset \mathbb{R}^n)$$

dove $\mathcal{R}(E)$ indica la famiglia dei ricoprimenti numerabili di E costituiti di intervalli aperti in $\mathbb{R}^n$, mentre $v(I_j)$ denota la misura elementare dell'intervallo I_j. Allora $\mathcal{L}^n$ è una misura esterna metrica ed è di Radon.

[* Terza settimana (30/09/2013); 18 *]

Definizione 2.3. *La misura esterna $\mathcal{L}^n$ definita in Teorema 2.3 è detta "misura esterna di Lebesgue n-dimensionale".*

Il seguente risultato elenca alcune proprietà della misura esterna di Lebesgue.

Teorema 2.4 (**). *Valgono i seguenti fatti:*

(1) *Per ogni $a \in \mathbb{R}^n$ si ha $\mathcal{L}^n(\{a\}) = 0$;*
(2) *Se I è un intervallo aperto in $\mathbb{R}^n$, si ha $\mathcal{L}^n(I) = v(I)$;*
(3) *Per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $\tau \in \mathbb{R}^n$ si ha $\mathcal{L}^n(E + \tau) = \mathcal{L}^n(E)$;*
(4) *Per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $\rho \in \mathbb{R}^+$ si ha $\mathcal{L}^n(\rho E) = \rho^n \mathcal{L}^n(E)$.*

Esempio 2.1. Si ha $\mathcal{L}^n(\mathbb{Q}^n) = 0$. L'insieme $\mathbb{Q}^n$ è misurabile.

Esempio 2.2 (Esistenza di insiemi non misurabili). Consideriamo la seguente relazione di equivalenza in $[0, 1]$: $x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$. Grazie all'assioma della scelta possiamo poi "costruire" un insieme E di rappresentanti delle classi di equivalenza. Se $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, poniamo infine

$$E_i := (E \cap [0, q_i] + 1 - q_i) \cup (E \cap (q_i, 1] - q_i).$$

Allora E non è misurabile. Se lo fosse, lo sarebbero anche tutti gli E_i. Poiché questi sono a-due-a-due disgiunti e si ha

$$(0, 1] \subset \bigcup_i E_i \subset [0, 1]$$

si giungerebbe all'assurdo:

$$1 = \mathcal{L}^1\Big(\cup_i E_i \Big) = \sum_i \mathcal{L}^1(E_i) = \sum_i \mathcal{L}^1(E).$$

Osservazione 2.3. Senza l'assioma della scelta è impossibile provare l'esistenza di insiemi non misurabili (Solovay, 1970).

Osservazione 2.4. Utilizzando l'insieme di Cantor si può provare che esistono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che sono misurabili rispetto a $\mathcal{L}^n$ ma non sono Boreliani.

Teorema 2.5 (*). *Dati $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, indichiamo con $\mathcal{R}_\delta(E)$ la famiglia dei ricoprimenti numerabili $\{C_j\}$ di E tali che diam$(C_j) \le \delta$ per ogni j. Per $s \in [0, +\infty)$, poniamo anche*

$$\alpha(s) := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)}, \qquad \Gamma(t) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx.$$

Allora la funzione $\mathcal{H}^s_\delta : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ definita da

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) := \inf \left\{ \sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam\ C_j}{2} \right)^s \,\middle|\, \{C_j\} \in \mathcal{R}_\delta(E) \right\}$$

è una misura esterna.

Teorema 2.6 (**). *Sia* $s \in [0, +\infty)$ *e* $E \subset \mathbb{R}^n$. *Allora la funzione* $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(E)$ *è monotona decrescente, quindi esiste*

$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(E).$$

La mappa $\mathcal{H}^s : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$ *è una misura esterna metrica e Borel regolare, ma non di Radon (eccetto che per* $s \geq n$*).*

Definizione 2.4. $\mathcal{H}^s$ *è detta "misura esterna di Hausdorff* s*-dimensionale".*

Ora Teorema 2.6 può venire riformulato come segue.

Teorema 2.7 (°). *La misura esterna di Hausdorff è una misura esterna metrica e Borel regolare, ma non di Radon (eccetto che per* $s \geq n$*).*

Alcune ulteriori proprietà della misura esterna di Hausdorff sono raccolte in questo teorema di cui non proviamo il punto (2). Per la dimostrazione di tale fatto, ci si può riferire a [**3**].

Teorema 2.8 (*). *Si ha:*

(1) $\mathcal{H}^0 = \#$ *(misura del conteggio);*
(2) $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ *(in* $\mathbb{R}^n$*);*
(3) *Per ogni* $E \subset \mathbb{R}^n$ *e per ogni* $\tau \in \mathbb{R}^n$ *si ha* $\mathcal{H}^s(E + \tau) = \mathcal{H}^s(E)$*;*
(4) *Per ogni* $E \subset \mathbb{R}^n$ *e per ogni* $\rho \in \mathbb{R}^+$ *si ha* $\mathcal{H}^s(\rho E) = \rho^s \mathcal{H}^s(E)$.

Attraverso le proprietà della misura di Hausdorff si può definire una nozione di dimensione per i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 2.3 (*). *Se* $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$, *con* $E \subset \mathbb{R}^n$ *e* $s \geq 0$, *allora* $\mathcal{H}^t(E) = 0$ *per ogni* $t > s$. *Inoltre, per ogni* $t > n$ *si ha* $\mathcal{H}^t(\mathbb{R}^n) = 0$. *Conseguentemente, per ogni* $E \subset \mathbb{R}^n$, *l'insieme*

$$R(E) := \{t \in [0, +\infty) \,|\, \mathcal{H}^t(E) = 0\}$$

è una semiretta destra che include $(n, +\infty)$. *La "dimensione di Hausdorff" dell'insieme* $E \subset \mathbb{R}^n$ *è definita come il numero*

$$dim_H(E) := \inf R(E) \leq n.$$

Esempio 2.3. Sia C l'insieme di Cantor. Se esiste s tale che $\mathcal{H}^s(C) \in (0, +\infty)$ allora $s = \ln 2 / \ln 3$. Questo ci consente di "scommettere" che C abbia dimensione di Hausdorff pari a $\ln 2 / \ln 3$. Per una dimostrazione completa di tale fatto vedasi [**4**, Theorem 1.14]).

[* Quarta settimana (07/10/2013); 20 *]

Definizione 2.5. *Sia* X *un insieme e* $\mathcal{A}$ *una* σ*-algebra in* X. *Allora, una "misura su* $\mathcal{A}$*" è una funzione* $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *tale che:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;
(ii) *se* $\{E_j\}$ *è una famiglia numerabile di insiemi in* $\mathcal{A}$ *a-due-a-due disgiunti, allora* $\mu(\cup_j E_j) = \sum_j \mu(E_j)$.

La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *è detta "spazio con misura".*

Come conseguenza di Teorema 1.1 e Proposizione 1.1, otteniamo subito il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 2.4 (°). *Se* φ *è una misura esterna sull'insieme* X*, allora* $(X, \mathcal{M}_\varphi, \varphi|_{\mathcal{M}_\varphi})$ *è uno spazio con misura.*

ESEMPIO 2.4. La "misura di Lebesgue" $\mathcal{L}^n|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}}$ e la "misura di Hausdorff" $\mathcal{H}^s|_{\mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}}$. Per semplicità esse sono indicate con $\mathcal{L}^n$ and $\mathcal{H}^s$, rispettivamente.

OSSERVAZIONE 2.5. Ci si può chiedere se una misura provenga sempre da una misura esterna nel modo indicato in Proposizione 2.4. Una risposta quasi affermativa è data dal seguente risultato (vedasi [**8**, Theorem 4.47]): Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ μ è uno spazio con misura, allora esiste una misura esterna φ su X tale che $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_\varphi$ e $\varphi|_{\mathcal{A}} = \mu$.

CHAPTER 2

Funzioni misurabili e integrale.

1. Funzioni misurabili.

DEFINIZIONE 1.1. *Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e Y, rispettivamente, uno spazio con misura e uno spazio topologico. Allora una funzione $f : X \to Y$ si dice "misurabile" se per ogni aperto G in Y si ha $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$.*

OSSERVAZIONE 1.1. Consideriamo uno spazio misurabile $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e supponiamo che X sia anche uno spazio topologico con la topologia inclusa in $\mathcal{A}$. Inoltre, siano Y uno spazio topologico e $f : X \to Y$ una funzione continua. Allora f è misurabile. Esempi di situazioni di questo tipo sono:

- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}, \mathcal{L}^n|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}})$, $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ continua;
- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}, \mathcal{H}^s|_{\mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}})$, $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ continua.

PROPOSIZIONE 1.1 (**). *Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura, Y uno spazio topologico e $f : X \to Y$ una funzione misurabile. Allora la famiglia $\{E \in 2^Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ è una σ-algebra contenente i Boreliani.*

PROPOSIZIONE 1.2 (°). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e siano Y, Z spazi topologici. Supponiamo inoltre che $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ siano, rispettivamente, una funzione misurabile e una funzione continua. Allora $g \circ f : X \to Z$ è una funzione misurabile.*

PROPOSIZIONE 1.3 (**). *Siano dati uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Allora le seguenti affermazioni sono fra di loro equivalenti:*

(1) *f è misurabile;*
(2) *$f^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{A}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;*
(3) *$f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{A}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;*
(4) *$f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{A}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;*
(5) *$f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.*

[* Quinta settimana (14/10/2013); 27 *]

TEOREMA 1.1 (**). *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio con misura, valgono le seguenti proprietà:*

(1) *Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ misurabili. Allora $f + g$, $|f|$, fg, $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono misurabili. Se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in X$, la funzione f/g è misurabile.*

(2) *Sia data una successione di funzioni misurabili* $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *(*$k = 1, 2, \dots$*). Allora le funzioni* $\inf_k f_k$, $\sup_k f_k$, $\liminf_k f_k$ *e* $\limsup_k f_k$ *sono misurabili.*

Osservazione 1.2. La tesi (1) di Teorema 1.1 si estende facilmente a $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili, in tutti i casi in cui ha senso.

2. Integrale: definizione e prime proprietà

Definizione 2.1. *Sia* X *un insieme. Una funzione* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *si dice "numerabilmente semplice" se* $Im(f)$ *è numerabile.*

Definizione 2.2. *Sia* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura e indichiamo con* Σ *la famiglia delle funzioni numerabilmente semplici e misurabili* $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$*. Allora:*

(i) *Se* $\varphi \in \Sigma$ *e* $\varphi \geq 0$*, poniamo*

$$I_\mu(\varphi) := \sum_i a_i \mu(E_i); \qquad \{a_i\} = Im(\varphi),\ E_i := \varphi^{-1}(\{a_i\})$$

dove si assume per convenzione che $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$*;*

(ii) *Se* $\varphi \in \Sigma$ *e almeno uno di* $I_\mu(\varphi \vee 0)$ *e* $I_\mu((-\varphi) \vee 0)$ *è finito, allora poniamo*

$$I_\mu(\varphi) := I_\mu(\varphi \vee 0) - I_\mu((-\varphi) \vee 0).$$

Definizione 2.3. *Siano dati uno spazio con misura* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *e una funzione* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$*. Indichiamo con* Σ^* *la famiglia delle funzioni numerabilmente semplici e misurabili* $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *tali che almeno uno di* $I_\mu(\varphi \vee 0)$ *e* $I_\mu((-\varphi) \vee 0)$ *sia finito. Poniamo poi*

$$\Sigma_-(f) := \{\varphi \in \Sigma^* \,|\, \varphi \leq f \ \mu\text{-q.o.}\}, \qquad \Sigma_+(f) := \{\varphi \in \Sigma^* \,|\, \varphi \geq f \ \mu\text{-q.o.}\}.$$

Allora:

(i) *L'"integrale superiore di* f*" è dato da*

$$\int^* f\, d\mu := \inf\{I_\mu(\varphi) \,|\, \varphi \in \Sigma_+(f)\}$$

mentre l'"integrale inferiore di f*" è*

$$\int_* f\, d\mu := \sup\{I_\mu(\varphi) \,|\, \varphi \in \Sigma_-(f)\};$$

(ii) *Si dice che "*f *è integrabile" se* f *è misurabile e gli integrali inferiore e superiore di* f *sono uguali. In tal caso si definisce l'"integrale di* f*"*

$$\int f\, d\mu := \int^* f\, d\mu = \int_* f\, d\mu.$$

(iii) *Si dice che "*f *è sommabile" se* f *è integrabile e* $\int f d\mu$ *è finito.*

Osservazione 2.1. Siano dati uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e due funzioni misurabili $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che $f = g$ μ-q.o. Allora si ha

$$\Sigma_-(f) = \Sigma_-(g), \qquad \Sigma_+(f) = \Sigma_+(g)$$

e quindi

$$\int_* f\, d\mu = \int_* g\, d\mu, \qquad \int^* f\, d\mu = \int^* g\, d\mu.$$

In particolare, f è integrabile se e solo se g è integrabile. In tal caso si ha

$$\int f\, d\mu = \int g\, d\mu.$$

Il seguente risultato elenca le prime proprietà dell'integrale, ben note nella trattazione elementare.

Teorema 2.1 (***). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Valgono le seguenti proprietà:*

(1) *Se $\varphi \in \Sigma^*$ e $I_\mu(\varphi)$ è finito, allora φ è sommabile e si ha $\int \varphi\, d\mu = I_\mu(\varphi)$;*
(2) *Una funzione sommabile è finita μ-q.o.;*
(3) *Se f, g sono funzioni sommabili e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\alpha f + \beta g$ è sommabile e si ha*
$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu;$$
(4) *Se f, g sono funzioni sommabili e $f \leq g$, allora*
$$\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu;$$
(5) *Se f è una funzione sommabile e $A \in \mathcal{A}$, allora $f\varphi_A$ è una funzione sommabile;*
(6) *Una funzione misurabile f è sommabile se e soltanto se $|f|$ è una funzione sommabile;*
(7) *Se f è una funzione sommabile, allora*
$$\left| \int f\, d\mu \right| \leq \int |f|\, d\mu.$$

[* Sesta settimana (21/10/2013); 34 *]

Definizione 2.4. *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione misurabile e se $A \in \mathcal{A}$, allora:*

(i) *Se $f\varphi_A$ è integrabile, si dice che "f è integrabile in A"e si pone*
$$\int_A f\, d\mu := \int f\varphi_A\, d\mu;$$
(ii) *Si dice che "f è sommabile in A" se $f\varphi_A$ è sommabile.*

Vale il seguente teorema che manifesta la maggior "versatilità" di questa questa teoria dell'integrazione rispetto a quella elementare di Riemann.

Teorema 2.2 (**). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e consideriamo una funzione misurabile $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $f \geq 0$ μ-q.o. Allora f è integrabile.*

Corollario 2.1 (*). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Siano $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, rispettivamente, una funzione misurabile e una funzione sommabile soddisfacenti $|f| \leq |g|$ μ-q.o. Allora f è sommabile.*

Vale il seguente facile e naturale risultato che ci sarà utile in seguito.

Proposizione 2.1 (*). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile tale che $f \geq 0$ μ-q.o. e $\int_X f \, d\mu = 0$. Allora $f = 0$ μ-q.o.*

3. Teoremi di convergenza integrale

Teorema 3.1 (Lemma di Fatou (***)). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e consideriamo una successione di funzioni misurabili $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che $f_k \geq 0$ μ-q.o. Allora*

$$\int \liminf_k f_k \, d\mu \leq \liminf_k \int f_k \, d\mu.$$

Teorema 3.2 (Convergenza monotona (*)). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e consideriamo una successione di funzioni misurabili $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che $f_{k+1} \geq f_k \geq 0$ μ-q.o. Allora*

$$\lim_k \int f_k \, d\mu = \int \lim_k f_k \, d\mu.$$

Corollario 3.1 (°). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e consideriamo una successione di funzioni misurabili $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che $f_k \geq 0$ μ-q.o. Allora*

$$\int \sum_k f_k \, d\mu = \sum_k \int f_k \, d\mu.$$

Corollario 3.2 (°). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e consideriamo una famiglia numerabile di insiemi $A_k \in \mathcal{A}$ a-due-a-due disgiunti e tali che $\cup_k A_k = X$. Se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione sommabile allora esiste $\sum_k \int_{A_k} f \, d\mu$ e si ha*

$$\int f \, d\mu = \sum_k \int_{A_k} f \, d\mu.$$

Teorema 3.3 (Convergenza dominata (**)). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Consideriamo:*

(i) *Una successione di funzioni misurabili $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ che converge μ-q.o. a $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$;*
(ii) *Una funzione sommabile $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $|f_k| \leq g$ μ-q.o., per ogni k.*

Allora ogni f_k e f sono sommabili e vale

$$\lim_k \int |f_k - f| \, d\mu = 0.$$

In particolare

$$\lim_k \int f_k \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Osservazione 3.1. Il seguente esempio mostra che, in generale, senza l'ipotesi di dominazione, la conclusione di Teorema 3.3 può essere falsa. Consideriamo lo spazio con misura $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}, \mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}})$ e la successione di funzioni

$$f_k := k\varphi_{[0,1/k)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

Si vede subito che tale successione converge q.o. alla funzione $f := 0$, mentre si ha

$$\lim_k \int |f_k - f| \, d\mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}} = \int_0^{1/k} k \, d\mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}} = 1.$$

[* Settima settimana (28/10/2013); 38 *]

4. Il teorema di Fubini

Proposizione 4.1 (*). *Siano X, Y insiemi, siano*

$$\mu : 2^X \to [0, +\infty], \quad \nu : 2^Y \to [0, +\infty]$$

due misure esterne e definiamo

$$\mathcal{R} := \mathcal{M}_\mu \times \mathcal{M}_\nu = \{A \times B \,|\, A \in \mathcal{M}_\mu,\, B \in \mathcal{M}_\nu\}.$$

Allora la funzione

$$\mu \times \nu : 2^{X \times Y} \to [0, +\infty]$$

definita come segue ($E \subset X \times Y$)

$$(\mu \times \nu)(E) := \inf \left\{ \sum_j \mu(A_j)\nu(B_j) \,\middle|\, \{A_j \times B_j\} \subset \mathcal{R},\, E \subset \cup_j (A_j \times B_j) \right\}$$

è una misura esterna.

Per le misure di Lebesgue vale il seguente risultato.

Proposizione 4.2 (**). *Per ogni coppia di numeri interi positivi m, n si ha*

$$\mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{m+n}.$$

[* Ottava settimana (04/11/2013); 45 *]

Premettiamo agli enunciati dei prossimi due lemmi un pò di notazione e alcune ipotesi comuni.

Prima di tutto, come in Proposizione 4.1, siano date due misure esterne

$$\mu : 2^X \to [0, +\infty], \quad \nu : 2^Y \to [0, +\infty]$$

e definiamo
$$\mathcal{R} := \mathcal{M}_\mu \times \mathcal{M}_\nu = \{A \times B \,|\, A \in \mathcal{M}_\mu,\ B \in \mathcal{M}_\nu\}.$$
Se $S \in 2^{X\times Y}$ e $x \in X$, poniamo
$$S_x := \{y \in Y \,|\, (x,y) \in S\}.$$
Infine, sia
$$\mathcal{F} := \left\{ S \in 2^{X\times Y} \,\middle|\, S_x \in \mathcal{M}_\nu \text{ per } \mu\text{-q.o. } x \in X \text{ e } x \mapsto \nu(S_x) \text{ è } \mu\text{-misurabile} \right\}$$
e definiamo
$$\rho : \mathcal{F} \to [0, +\infty], \qquad \rho(S) := \int \nu(S_x)\, d\mu.$$

Lemma 4.1 (***). *Valgono i seguenti fatti:*

(1) *Se $A \times B \in \mathcal{R}$ allora $A \times B \in \mathcal{F}$ (cioè $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$) e $\rho(A\times B) = \mu(A)\nu(B)$;*
(2) *Se $S, T \in \mathcal{F}$ e $S \subset T$ allora $\rho(S) \le \rho(T)$;*
(3) *Se $\{S_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi di $\mathcal{F}$ a-due-a-due disgiunti, allora*
$$\cup_j S_j \in \mathcal{F}, \qquad \rho(\cup_j S_j) = \sum_j \rho(S_j);$$
(4) *Se $\{R_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi di $\mathcal{R}$, allora*
$$\cup_j R_j \in \mathcal{F} \text{ (quindi } \mathcal{R}_\sigma \subset \mathcal{F}), \qquad \rho(\cup_j R_j) \le \sum_j \rho(R_j).$$

Inoltre, se μ e ν sono σ-finite:

(5) *Si ha $\mathcal{R}_{\sigma\delta} \subset \mathcal{F}$;*
(6) *Per ogni $S \in 2^{X\times Y}$ esiste $E \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ tale che*
$$E \supset S, \quad \rho(E) = (\mu\times\nu)(S).$$
Nel caso particolare che $S \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ si ha
$$\rho(S) = (\mu\times\nu)(S);$$
(7) *Se $S \in 2^{X\times Y}$ soddisfa $(\mu\times\nu)(S) = 0$, allora $S \in \mathcal{F}$ e $\rho(S) = 0$;*
(8) *Si ha $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}_{\mu\times\nu}$;*
(9) *Si ha $\mathcal{M}_{\mu\times\nu} \subset \mathcal{F}$ e per ogni $S \in \mathcal{M}_{\mu\times\nu}$ si ha $\rho(S) = (\mu\times\nu)(S)$.*

Osservazione 4.1. Con riferimento al punto (9) di Lemma 4.1, potremmo chiederci se valga la proprietà più forte che
$$S_x \in \mathcal{M}_\nu \text{ per ogni } x \in X, \text{ tutte le volte che } S \in \mathcal{M}_{\mu\times\nu}.$$
Ebbene, in generale questo non è vero. Per provarlo, consideriamo l'insieme $E \notin \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}$ costruito in Esempio 2.2 e definiamo
$$S := \{0\} \times E \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$
Poiché $(\mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^1)(S) = \mathcal{L}^2(S) = 0$, si ha che $S \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1\times\mathcal{L}^1}$ (per (2) di Teorema 1.1). Tuttavia $S_0 = E \notin \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}$.

Teorema 4.1 (**). *Supponiamo che μ, ν siano σ-finite e sia $f(x,y) : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $(\mu \times \nu)$-sommabile in $S \in \mathcal{M}_{\mu\times\nu}$. Allora:*

- $S_x := \{y \in Y \mid (x,y) \in S\} \in \mathcal{M}_\nu$, *per μ-q.o. $x \in X$;*
- $y \mapsto f(x,y)$ *è ν-integrabile in S_x, per μ-q.o. $x \in X$;*
- $x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ *è μ-integrabile;*
- *vale l'uguaglianza*

$$\int_S f\, d(\mu \times \nu) = \int_X \left[\int_{S_x} f(x,y)\, d\nu(y)\right] d\mu(x).$$

Naturalmente, lo stesso argomento prova anche il seguente risultato speculare al precedente.

Teorema 4.2 (°). *Supponiamo che μ, ν siano σ-finite e sia $f(x,y) : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $(\mu \times \nu)$-sommabile in $S \in \mathcal{M}_{\mu\times\nu}$. Allora:*

- $S_y := \{x \in X \mid (x,y) \in S\} \in \mathcal{M}_\mu$, *per ν-q.o. $y \in Y$;*
- $x \mapsto f(x,y)$ *è μ-integrabile in S_y, per ν-q.o. $y \in Y$;*
- $y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ *è ν-integrabile;*
- *vale l'uguaglianza*

$$\int_S f\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left[\int_{S_y} f(x,y)\, d\mu(x)\right] d\nu(y).$$

Applicando Teorema 4.2 alle misure di Lebesgue e ricordando Proposizione 4.2, otteniamo subito il seguente risultato.

Corollario 4.1 (°). *Sia $f(x,y) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathcal{L}^{m+n}$-sommabile in $S \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^{m+n}}$. Allora:*

- $S_x := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \in S\} \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$, *per $\mathcal{L}^m$-q.o. $x \in \mathbb{R}^m$;*
- $y \mapsto f(x,y)$ *è $\mathcal{L}^n$-integrabile in S_x, per $\mathcal{L}^m$-q.o. $x \in \mathbb{R}^m$;*
- $x \mapsto \int_{S_x} f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)$ *è $\mathcal{L}^m$-integrabile;*
- *vale l'uguaglianza*

$$\int_S f\, d\mathcal{L}^{m+n} = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{S_x} f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right] d\mathcal{L}^m(x).$$

Osservazione 4.2. Usando il punto (9) di Lemma 4.1 e la sottostante Proposizione 4.3, si prova facilmente il seguente risultato sulla "compatibilità misura-integrale". Siano dati una misura esterna σ-finita $\mu : X \to [0,+\infty]$ e una funzione μ-misurabile $f : X \to [0,+\infty]$ integrabile in $\Omega \in \mathcal{M}_\mu$. Definiamo il sottografico di $f|_\Omega$:

$$S_{f|_\Omega} := \{(x,t) \in \Omega \times [0,+\infty] \mid 0 \le t < f(x)\}.$$

Allora $S_{f|_\Omega} \in \mathcal{M}_{\mu\times\mathcal{L}^1}$ e vale l'identità

$$(\mu \times \mathcal{L}^1)(S_{f|_\Omega}) = \int_\Omega f\, d\mu.$$

Nel caso speciale $X = \mathbb{R}^m$ and $\mu = \mathcal{L}^m$, ricordando anche Proposizione 4.2, si trova

$$\mathcal{L}^{m+1}(S_{f|\Omega}) = \int_\Omega f\, d\mathcal{L}^m.$$

Ecco l'enunciato del teorema di approssimazione appena usato (per una dimostrazione vedasi [**8**, Theorem 5.24]).

PROPOSIZIONE 4.3. *Siano dati uno spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \alpha)$ e una funzione misurabile $f : X \to [0, +\infty]$. Allora esiste una successione di funzioni numerabilmente semplici e misurabili $s_j : X \to \mathbb{R}$ tali che $Im(s_j)$ è finito, $0 \le s_j \le s_{j+1} \le f$ e s_j converge puntualmente a f.*

[* Nona settimana (11/11/2013); 52 *]

5. La formula dell'area

Premessa intuitiva sulle parametrizzazioni. Esempi di parametrizzazione. Una parametrizzazione "regolare" può avere immagine non "liscia" e una parametrizzazione non "regolare" può avere immagine "liscia".

Enunciamo ora la definizione rigorosa di parametrizzazione regolare.

DEFINIZIONE 5.1. *Siano n e N due numeri interi positivi tali che $n \le N$. Allora una "(n, N)-parametrizzazione regolare" (o semplicemente "parametrizzazione regolare") è una mappa $\varphi : C \to \mathbb{R}^N$ tale che*

(i) *C è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ ed esiste un aperto A in $\mathbb{R}^n$ soddisfacente*
$$C = \overline{A}, \quad \mathcal{L}^n(\partial A) = 0;$$
(ii) *$\varphi|_A$ è iniettiva;*
(iii) *φ è di classe C^1, cioè esistono un aperto U in $\mathbb{R}^n$ e una mappa $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$ tali che*
$$C \subset U, \quad \Phi|_C = \varphi;$$
(iv) *Per ogni $x \in A$ si ha*
$$J\varphi(x) \neq 0$$
dove $J\varphi$ è l'estensione continua a C della funzione uniformemente continua
$$x \mapsto \Big(\det[D\varphi(x)^t \times D\varphi(x)]\Big)^{1/2}, \qquad x \in A.$$
Tale funzione è detta "fattore di trasformazione (associato a φ)".

OSSERVAZIONE 5.1. Nelle ipotesi di Definizione 5.1, si ha evidentemente

$$J\varphi(x) = \Big(\det[D\Phi(x)^t \times D\Phi(x)]\Big)^{1/2}, \qquad x \in C.$$

OSSERVAZIONE 5.2. Adottiamo la notazione introdotta in Definizione 5.1. Allora:

- Per una $(1, N)$-parametrizzazione regolare si ha
$$J\varphi(x) = |\varphi'(x)|, \text{ per ogni } x \in A;$$
- Per una $(2, 3)$-parametrizzazione regolare si ha
$$J\varphi(x) = |D_1\varphi(x) \times D_2\varphi(x)|, \text{ per ogni } x \in A;$$
- Per una (n, n)-parametrizzazione regolare si ha
$$J\varphi(x) = |\det D\varphi(x)|, \text{ per ogni } x \in A.$$

Vale il seguente risultato di cui dimostriamo solo il caso delle superfici ($n = 2$, $N = 3$).

Proposizione 5.1 (**). *Sia φ una (n, N)-parametrizzazione regolare. Allora $\varphi(A)$ è una sottovarietà n-dimensionale di $\mathbb{R}^N$ di classe C^1 (dove A è come in Definizione 5.1).*

Osservazione 5.3. Considerazioni intuitive ci convincono facilmente del seguente fatto (che si prova rigorosamente combinando la formula dell'area e [**13**, Theorem 6.27]) concernente le curve:

> Se C è un intervallo compatto di $\mathbb{R}$ e $\varphi : C \to \mathbb{R}^N$ è una $(1, N)$-parametrizzazione regolare, allora $\mathcal{H}^1(\varphi(C))$ coincide con l'estremo superiore della lunghezza delle curve poligonali inscritte in $\varphi(C)$.

L'esempio di Schwarz mostra che un fatto analogo non sussiste per le superfici. Infatti esso prova che ogni superficie semicilindrica E è approssimabile (con arbitrario grado di precisione) mediante superfici poliedrali inscritte in E e aventi facce "trasversali" alla stessa E. Ciò consente a tali superfici approssimanti di avere area arbitrariamente grande. In altri termini, l'estremo superiore dell'area delle superfici poliedrali inscritte in E vale $+\infty$.

Trattazione intuitiva della formula dell'area. Le seguenti considerazioni si riferiscono esplicitamente a una $(2, 3)$-parametrizzazione regolare $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$, ma si estendono in modo semplice e naturale a una (n, N)-parametrizzazione regolare.

L'esempio di Schwarz ci fa capire come sia necessario produrre superfici poliedrali approssimanti aventi le facce che "si dispongono sempre di più in posizione tangente a $\varphi(C)$, al crescere del grado di approssimazione". Descriviamo un modo per farlo:

- Preso $P_0 \in A$, siano $T(\varepsilon)$ e $T_\varphi(\varepsilon)$, rispettivamente, il triangolo interno ad A di vertici P_0, $P_0 + (\varepsilon, 0)$, $P_0 + (0, \varepsilon)$ e quello inscritto in $\varphi(C)$ di vertici $\varphi(P_0)$, $\varphi(P_0 + (\varepsilon, 0))$, $\varphi(P_0 + (0, \varepsilon))$. Da

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\varphi(P_0 + (\varepsilon, 0)) - \varphi(P_0)}{\varepsilon} = D_1\varphi(P_0), \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\varphi(P_0 + (0, \varepsilon)) - \varphi(P_0)}{\varepsilon} = D_2\varphi(P_0)$$

e poiché $\{D_1\varphi(P_0), D_2\varphi(P_0)\}$ è una base dello spazio tangente a $\varphi(C)$ in $\varphi(P_0)$, concludiamo che il triangolo $T_\varphi(\varepsilon)$ tende a disporsi "in posizione tangente" a $\varphi(C)$ in $\varphi(P_0)$, quando $\varepsilon \to 0$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned}\frac{m_2(T_\varphi(\varepsilon))}{m_2(T(\varepsilon))} &= \frac{|[\varphi(P_0+(\varepsilon,0))-\varphi(P_0)]\times[\varphi(P_0+(0,\varepsilon))-\varphi(P_0)]|/2}{\varepsilon^2/2} \\ &= \left|\frac{\varphi(P_0+(\varepsilon,0))-\varphi(P_0)}{\varepsilon}\times\frac{\varphi(P_0+(0,\varepsilon))-\varphi(P_0)}{\varepsilon}\right|\end{aligned}$$

e quindi (indicando con m_2 l'area elementare e ricordando anche il secondo punto di Osservazione 5.2)

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{m_2(T_\varphi(\varepsilon))}{m_2(T(\varepsilon))} = |D_1\varphi(P_0)\times D_2\varphi(P_0)| = J\varphi(P_0).$$

Il numero $J\varphi(P_0)$ può pertanto essere interpretato come "fattore di trasformazione dell'area indotto da φ in (P_0)".

- Consideriamo, nel piano, il reticolo triangolare isoscele-retto di passo ε e sia $\{T_i(\varepsilon) \,|\, i = 1,\dots, N(\varepsilon)\}$ la famiglia dei triangoli individuati da tale reticolo che sono contenuti in A. Indichiamo con $P_i(\varepsilon)$ il vertice del triangolo $T_i(\varepsilon)$ corrispondente all'angolo retto e sia $T_{\varphi,i}(\varepsilon)$ il triangolo inscritto in $\varphi(C)$ di vertici $\varphi(P_i(\varepsilon))$, $\varphi(P_i(\varepsilon)+(\varepsilon,0))$, $\varphi(P_i(\varepsilon)+(0,\varepsilon))$. Allora la superficie poliedrale

$$\bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} T_{\varphi,i}(\varepsilon)$$

è inscritta in $\varphi(C)$ e ha la proprietà "desiderata": le sue facce "tendono a disporsi in posizione tangente" quando $\varepsilon \to 0$. Inoltre, se $f : \varphi(C) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} f(\varphi(P_i(\varepsilon)))m_2(T_{\varphi,i}(\varepsilon)) &= \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} f(\varphi(P_i(\varepsilon)))\frac{m_2(T_{\varphi,i}(\varepsilon))}{m_2(T_i(\varepsilon))}m_2(T_i(\varepsilon)) \\ &= \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} f(\varphi(P_i(\varepsilon)))\delta_i(\varepsilon)m_2(T_i(\varepsilon)) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} f(\varphi(P_i(\varepsilon)))J\varphi(P_i(\varepsilon))m_2(T_i(\varepsilon))\end{aligned}$$

dove

$$\delta_i(\varepsilon) := \frac{m_2(T_{\varphi,i}(\varepsilon))}{m_2(T_i(\varepsilon))} - J\varphi(P_i(\varepsilon)).$$

La combinazione dei due punti precedenti fornisce uno sketch di prova della formula dell'area per una $(2,3)$-parametrizzazione regolare:

$$\int_{\varphi(C)} f = \int_A (f\circ\varphi)J\varphi\, d\mathcal{L}^2.$$

Ora possiamo finalmente enunciare efficacemente il teorema generale della formula dell'area, per una dimostrazione completa del quale si rimanda a [**6, 7**] (per esempio).

Teorema 5.1 (Formula dell'area). *Siano date una (n,N)-parametrizzazione regolare $\varphi : C \to \mathbb{R}^N$ e una funzione continua $f : \varphi(C) \to \mathbb{R}$. Allora vale l'identità*

$$\int_{\varphi(C)} f\, d\mathcal{H}^n = \int_C (f \circ \varphi) J\varphi\, d\mathcal{L}^n \left(= \int_A (f \circ \varphi) J\varphi\, d\mathcal{L}^n \right).$$

Corollario 5.1 (°). *Siano $\varphi : C \to \mathbb{R}^N$ e $\psi : K \to \mathbb{R}^N$ due (n,N)-parametrizzazioni regolari aventi la stessa immagine E (i.e. $\varphi(C) = \psi(K) = E$) e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora*

$$\int_C (f \circ \varphi) J\varphi\, d\mathcal{L}^n = \int_K (f \circ \psi) J\psi\, d\mathcal{L}^n.$$

Da Teorema 5.1 e dai primi due punti di Osservazione 5.2 segue subito il seguente risultato.

Corollario 5.2 (°). *Valgono i seguenti fatti (dove A è come in Definizione 5.1):*

(1) *Se $\gamma : C \to \mathbb{R}^N$ è una $(1,N)$-parametrizzazione regolare e se $f : \gamma(C) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora*

$$\int_{\gamma(C)} f\, d\mathcal{H}^1 = \int_A (f \circ \gamma)\, |\gamma'|\, d\mathcal{L}^1;$$

(2) *Se $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$ è una $(2,3)$-parametrizzazione regolare e se $f : \varphi(C) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora*

$$\int_{\varphi(C)} f\, d\mathcal{H}^2 = \int_A (f \circ \varphi)\, |D_1\varphi \times D_2\varphi|\, d\mathcal{L}^2.$$

Da Teorema 5.1, dal terzo punto di Osservazione 5.2 e da (2) in Teorema 2.8 segue poi la seguente formula per il cambiamento di variabile nell'integrale.

Corollario 5.3 (°). *Se $\varphi : C \to \mathbb{R}^n$ è una (n,n)-parametrizzazione regolare e se $f : \varphi(C) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora*

$$\int_{\varphi(C)} f\, d\mathcal{L}^n = \int_A (f \circ \varphi)\, |\det(D\varphi)|\, d\mathcal{L}^n$$

dove A è come in Definizione 5.1.

[* Decima settimana (18/11/2013); 59 *]

6. Formule di Gauss-Green

Definizione 6.1. *Si considerino due (n, N)-parametrizzazioni regolari*

$$\varphi : C \to \mathbb{R}^N, \quad \psi : K \to \mathbb{R}^N$$

e si sottintenda la notazione introdotta in Definizione 5.1 ($C = \overline{A}$ con A aperto, $K = \overline{B}$ con B aperto, eccetera). Allora:

(1) *Diremo che "ψ è equivalente a φ", e scriveremo $\psi \sim \varphi$, se esiste un diffeomorfismo $\sigma : A \to B$ di classe C^1 tale che $\varphi(x) = \psi \circ \sigma(x)$ per ogni $x \in A$;*

(2) *Se $\psi \sim \varphi$ e σ è come in (1), diremo che "φ e ψ sono equiorientate" tutte le volte che $\det(D\sigma(x)) > 0$ per ogni $x \in A$. Diremo invece che "φ e φ' sono antiorientate" se $\det(D\sigma(x)) < 0$ per ogni $x \in A$.*

La proposizione che segue spiega il perché del punto (2) in Definizione 6.1, in riferimento ai casi delle curve e delle superfici. Essa si può estendendere facilmente al caso generale con l'ausilio di un pò di algebra multilineare.

Prima di enunciare il risultato, definiamo il campo tangente unitario a una $(1, N)$-parametrizzazione regolare $\gamma : C \to \mathbb{R}^N$ $(C = \overline{A})$

$$\tau_\gamma : A \to \mathbb{S}^{N-1}, \quad \tau_\gamma := \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$$

e il campo normale a una $(2, 3)$-parametrizzazione regolare $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$ $(C = \overline{A})$

$$\nu_\varphi : A \to \mathbb{S}^2, \quad \nu_\varphi := \frac{D_1\varphi \times D_2\varphi}{|D_1\varphi \times D_2\varphi|}.$$

Proposizione 6.1 (*). *Vale quanto segue:*

(1) *Se*

$$\gamma : C \to \mathbb{R}^N, \quad \lambda : K \to \mathbb{R}^N \qquad (C = \overline{A}, K = \overline{B})$$

sono $(1, N)$-parametrizzazioni regolari equivalenti e se $\sigma : A \to B$ è il diffeomorfismo di classe C^1 tale che $\gamma = \lambda \circ \sigma$, allora

$$\tau_\gamma = \mathit{sign}(\sigma')\, \tau_\lambda \circ \sigma;$$

(2) *Se*

$$\varphi : C \to \mathbb{R}^3, \quad \psi : K \to \mathbb{R}^3 \qquad (C = \overline{A}, K = \overline{B})$$

sono $(2, 3)$-parametrizzazioni regolari equivalenti e se $\sigma : A \to B$ è il diffeomorfismo di classe C^1 tale che $\varphi = \psi \circ \sigma$, allora

$$\nu_\varphi = \mathit{sign}(\det D\sigma)\, \nu_\psi \circ \sigma.$$

Esempio 6.1. Ecco due esempi di coppie di $(2, 3)$-parametrizzazioni regolari equivalenti e antiorientate:

- Sia $C := [0,a] \times [0,b]$, $A := (0,a) \times (0,b)$, $f \in C^1(C)$ e definiamo $\varphi, \psi : C \to \mathbb{R}^3$ come segue
$$\varphi(s,t) := (s,t,f(s,t)), \quad \psi(u,v) := (a-u, v, f(a-u,v)).$$
Allora
$$\varphi(s,t) = (\psi \circ \sigma)(s,t) \text{ con } \sigma(s,t) := (a-s,t)$$
per ogni $(s,t) \in A$. Si vede subito che $\sigma : A \to A$ è un diffeomorfismo di classe C^1 e si ha $\det D\sigma \equiv -1$.
- Sia $C := [0,2\pi] \times [0,\pi]$, $A := (0,2\pi) \times (0,\pi)$, $K := [0,2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$, $B := (0,2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$. Definiamo
$$\varphi : C \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(\theta,\psi) := (\sin\psi\cos\theta, \sin\psi\sin\theta, \cos\psi)$$
e
$$\psi : K \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(\alpha,\beta) := (\cos\beta\cos\alpha, \cos\beta\sin\alpha, \sin\beta).$$
Allora
$$\varphi(\theta,\psi) = (\psi \circ \sigma)(\theta,\psi) \text{ con } \sigma(\theta,\psi) := (\theta, \pi/2 - \psi)$$
per ogni $(\theta,\psi) \in A$. Anche in questo caso si vede subito che $\sigma : A \to B$ è un diffeomorfismo di classe C^1 e si ha $\det D\sigma \equiv -1$.

Passiamo ora a definire le nozioni di curva regolare a tratti e di superficie regolare a tratti.

Definizione 6.2. *Si consideri una famiglia finita di $(1,N)$-parametrizzazioni regolari*
$$\gamma_i : C_i \to \mathbb{R}^N \quad (i = 1, \dots, k)$$
tali che, posto $\Gamma_i := \gamma(C_i)$:

(i) *C_i è un intervallo;*

(ii) *$\Gamma_i \cap \Gamma_j = \partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma_j$ per ogni i, j con $i \neq j$.*

Allora $\Gamma := \cup_{i=1}^k \Gamma_i$ è detta "curva regolare a tratti"(risp. "curva regolare", se $k = 1$). Ogni Γ_i è detto "tratto regolare" di Γ. Inoltre (ricordando che, per Definizione 5.1, esiste un aperto A_i tale che $\overline{A_i} = C_i$ eccetera...) l'insieme $\Gamma_i^* := \gamma_i(A_i)$ è detto "parte interna" di Γ_i. Infine, se τ è il campo vettoriale definito come segue
$$\tau : \cup_{i=1}^k \Gamma_i^* \to \mathbb{S}^{N-1}, \quad \tau|_{\Gamma_i^*} := \tau_{\gamma_i} \circ (\gamma_i|_{A_i})^{-1}$$
allora la coppia (Γ, τ) è detta "curva regolare a tratti orientata"e la famiglia $\{\gamma_i\}$ è detta "parametrizzazione" di (Γ, τ).

Definizione 6.3. *Si consideri una famiglia finita di $(2,3)$-parametrizzazioni regolari*
$$\varphi_i : C_i \to \mathbb{R}^3 \quad (i = 1, \dots, k)$$
tali che, posto $\Sigma_i := \varphi(C_i)$:

(i) *∂C_i è una curva regolare a tratti;*

(ii) $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \partial\Sigma_i \cap \partial\Sigma_j$ *per ogni* i, j *con* $i \neq j$.

Allora $\Sigma := \cup_{i=1}^k \Sigma_i$ *è detta "superficie regolare a tratti"(risp. "superficie regolare", se* $k = 1$*). Ogni* Σ_i *è detto "tratto regolare" di* Σ*. Inoltre (ricordando che, per Definizione 5.1, esiste un aperto* A_i *tale che* $\overline{A_i} = C_i$ *eccetera...) l'insieme* $\Sigma_i^* := \varphi_i(A_i)$ *è detto "parte interna" di* Σ_i*. Infine, se* ν *è il campo vettoriale definito come segue*

$$\nu : \cup_{i=1}^k \Sigma_i^* \to \mathbb{S}^2, \quad \nu|_{\Sigma_i^*} := \nu_{\varphi_i} \circ (\varphi_i|_{A_i})^{-1}$$

allora la coppia (Σ, ν) *è detta "superficie regolare a tratti orientata" e la famiglia* $\{\varphi_i\}$ *è detta "parametrizzazione" di* (Σ, ν)*.*

Osservazione 6.1. Se (Γ, τ) è una curva regolare a tratti orientata, allora τ è continuo nella parte interna di ogni tratto regolare di Γ. Analogamente, se (Σ, ν) è una superficie regolare a tratti orientata, allora ν è continuo nella parte interna di ogni tratto regolare di Σ.

Osservazione 6.2. Non è difficile provare che per una (n, N)-parametrizzazione regolare (con la notazione di Definizione 5.1) si ha $\partial[\varphi(C)] \subset \varphi(\partial A)$. Inoltre, poiché per ipotesi si ha $\mathcal{L}^n(\partial A) = 0$, la formula dell'area con molteplicità (che generalizza Teorema 5.1 e per la quale rimandiamo a [**6**]) implica $\mathcal{H}^n(\varphi(\partial A)) = 0$. Ne segue che $\mathcal{H}^n(\partial[\varphi(C)]) = 0$. Quindi:

- Se Γ è una curva regolare a tratti, allora la frontiera di ogni tratto regolare Γ_i è $\mathcal{H}^1$-nulla. Quindi, se per ogni i si ha una funzione continua e limitata $f_i : \Gamma_i^* \to \mathbb{R}$, allora
$$f : \cup_i \Gamma_i^* \to \mathbb{R}, \quad f|_{\Gamma_i^*} := f_i$$
è una funzione definita $\mathcal{H}^1$-q.o. in Γ e si ha
$$\int_\Gamma f \, d\mathcal{H}^1 = \sum_i \int_{\Gamma_i^*} f_i \, d\mathcal{H}^1;$$
- Se Σ è una superficie regolare a tratti, allora la frontiera di ogni tratto regolare Σ_i è $\mathcal{H}^2$-nulla. Quindi, se per ogni i si ha una funzione continua e limitata $f_i : \Sigma_i^* \to \mathbb{R}$, allora
$$f : \cup_i \Sigma_i^* \to \mathbb{R}, \quad f|_{\Sigma_i^*} := f_i$$
è una funzione definita $\mathcal{H}^2$-q.o. in Σ e si ha
$$\int_\Sigma f \, d\mathcal{H}^2 = \sum_i \int_{\Sigma_i^*} f_i \, d\mathcal{H}^2.$$

Grazie a Osservazione 6.1 e a Osservazione 6.2 si può dare la seguente definizione.

Definizione 6.4. *Dati una curva regolare a tratti orientata* (Γ, τ) *in* $\mathbb{R}^N$ *e un campo continuo* $F : \Gamma \to \mathbb{R}^N$*, si definisce l'"integrale di* F *su* (Γ, τ)*" come segue:*

$$\int_{(\Gamma,\tau)} F := \int_\Gamma F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1.$$

Analogamente, dati una superficie regolare a tratti orientata (Σ,ν) e un campo continuo $F:\Sigma\to\mathbb{R}^3$, si definisce l'"integrale di F su (Σ,ν)" come segue:

$$\int_{(\Sigma,\nu)} F := \int_\Sigma F\cdot\nu\, d\mathcal{H}^2.$$

Da Definizione 6.2, Definizione 6.3 e Definizione 6.4 segue subito il seguente risultato.

Proposizione 6.2 (*). *Sia (Γ,τ) una curva regolare a tratti orientata in $\mathbb{R}^N$ e sia $F:\Gamma\to\mathbb{R}^N$ un campo continuo. Allora, se $\{\gamma_i\}$ è una parametrizzazione di (Γ,τ), si ha:*

$$\int_{(\Gamma,\tau)} F = \sum_i \int_{A_i} (F\circ\gamma_i)\cdot\gamma_i'\, d\mathcal{L}^1.$$

Analogamente, sia (Σ,ν) una superficie regolare a tratti orientata e sia $F:\Sigma\to\mathbb{R}^3$ un campo continuo. Allora, se $\{\varphi_i\}$ è una parametrizzazione di (Σ,ν), si ha:

$$\int_{(\Sigma,\nu)} F = \sum_i \int_{A_i} (F\circ\varphi_i)\cdot(D_1\varphi_i\times D_2\varphi_i)\, d\mathcal{L}^2.$$

[* Undicesima settimana (25/11/2013); 66 *]

Definizione 6.5. *Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^2$ è detto "x_2-semplice" se esistono due funzioni continue*

$$f,g:[a,b]\to\mathbb{R} \qquad (-\infty<a<b<+\infty)$$

con le seguenti proprietà:

(i) $E=\{x\in[a,b]\times\mathbb{R}\,|\,f(x_1)\le x_2\le g(x_1)\}$ *(in particolare E è compatto);*

(ii) *Esistono $a_i\in[a,b]$ $(i=0,\dots,k)$ con $a_0=a$, $a_k=b$ e $a_i<a_{i+1}$ tali che le funzioni $f|_{[a_i,a_{i+1}]}$ e $g|_{[a_i,a_{i+1}]}$ sono di classe C^1 (per $i=0,\dots,k-1$.*

In modo del tutto analogo si definiscono gli insiemi x_1-semplici. Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ si dice "semplice" se esso è x_i-semplice per $i=1,2$. Infine chiameremo "insieme composto" ogni unione finita di insiemi semplici E_i tali che $E_i\cap E_j=\partial E_i\cap\partial E_j$ per ogni i,j con $i\ne j$.

Definizione 6.6. *Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^3$ è detto "x_3-semplice" se esistono una famiglia finita $\{C_1,\dots,C_k\}$ di sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^2$ e due funzioni continue*

$$f,g:C\to\mathbb{R},\quad C:=C_1\cup\cdots\cup C_k$$

tali che:

(i) $E=\{x\in C\times\mathbb{R}\,|\,f(x_1,x_2)\le x_3\le g(x_1,x_2)\}$ *(in particolare E è compatto);*

(ii) *Ogni C_i è la chiusura di un aperto la cui frontiera è una curva regolare a tratti;*

(iii) $C_i\cap C_j=\partial C_i\cap\partial C_j$ *per ogni i,j con $i\ne j$;*

(iv) *Per ogni i, le funzioni $f|_{C_i}$ e $g|_{C_i}$ sono di classe C^1.*

In modo del tutto analogo si definiscono gli insiemi x_1-semplici e gli insiemi x_2-semplici. Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ si dice "semplice" se esso è x_i-semplice per $i = 1, 2, 3$. Infine chiameremo "insieme composto" ogni unione finita di insiemi semplici E_i tali che $E_i \cap E_j = \partial E_i \cap \partial E_j$ per ogni i, j con $i \neq j$.

Osservazione 6.3. Se E è un sottoinsieme composto di $\mathbb{R}^2$ (risp. $\mathbb{R}^3$), allora ∂E è una curva (risp. superficie) regolare a tratti. Pertanto ogni funzione continua nelle parti interne dei tratti regolari di ∂E risulta essere integrabile in ∂E.

Possiamo finalmente enunciare e provare il teorema relativo alle formule di Gauss-Green in $\mathbb{R}^3$ (Teorema di Gauss della divergenza).

Teorema 6.1 (**). *Sia E un sottoinsieme composto di $\mathbb{R}^3$ e sia ν il campo di vettori normali esterni definito nelle parti interne dei tratti regolari di ∂E. Allora per ogni funzione $h : E \to \mathbb{R}$ di classe C^1 vale l'identità*

$$\int_E D_i h \, d\mathcal{L}^3 = \int_{\partial E} h\nu_i \, d\mathcal{H}^2 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Quindi, se $F : E \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di classe C^1, si ha

$$\int_E div\, F \, d\mathcal{L}^3 = \int_{\partial E} F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^2.$$

Poiché $(\partial E, \nu)$ è una superficie regolare a tratti orientata, quest'ultima identità si può riscrivere come segue:

$$\int_E div\, F \, d\mathcal{L}^3 = \int_{(\partial E, \nu)} F.$$

Lo stesso argomento prova anche il seguente teorema di Green nel piano.

Teorema 6.2 (*). *Si consideri un sottoinsieme composto E di $\mathbb{R}^2$. Sia $\tau_E = (\tau_{E,1}, \tau_{E,2})$ il campo di vettori tangenti unitari a ∂E continuo nelle parti interne dei tratti regolari e tale che $\nu_E := (\tau_{E,2}, -\tau_{E,1})$ sia il campo di vettori normali esterni a ∂E. Allora per ogni funzione $h : E \to \mathbb{R}$ di classe C^1 vale l'identità*

$$\int_E D_i h \, d\mathcal{L}^2 = \int_{\partial E} h\nu_{E,i} \, d\mathcal{H}^1 \qquad (i = 1, 2).$$

Quindi, se $F : E \to \mathbb{R}^2$ è un campo vettoriale di classe C^1, si ha

$$\int_E div\, F \, d\mathcal{L}^2 = \int_{\partial E} F \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^1.$$

Infine $(\partial E, \tau_E)$ è una curva regolare a tratti orientata e

$$\int_{(\partial E, \tau_E)} F = \int_E (D_1 F_2 - D_2 F_1) \, d\mathcal{L}^2.$$

Osservazione 6.4. Sia $\varphi : C \to \mathbb{R}^3$ una $(2,3)$-parametrizzazione regolare ($C = \overline{A}$, con la notazione di Definizione 5.1). Consideriamo un sottoinsieme composto E di A e definiamo il campo vettoriale τ_E come in Teorema 6.2. Sappiamo allora che $(\partial E, \tau_E)$ è una curva regolare a tratti orientata. Sia $\{\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^2 \mid i = 1, \dots, k\}$ una sua parametrizzazione e sia (S, ν) la superficie regolare orientata determinata da $\varphi|_E$. Osserviamo che ogni $\varphi \circ \gamma_i$ è una $(1,3)$-parametrizzazione regolare e la famiglia $\{\varphi\circ\gamma_i\}$ soddisfa le ipotesi di Definizione 6.2. Pertanto tale famiglia genera una curva regolare a tratti orientata (Γ,τ), dove

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{k}(\varphi\circ\gamma_i)([a_i,b_i]) = \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{k}\gamma_i([a_i,b_i])\right) = \varphi(\partial E) = \partial S$$

e, per ogni $i = 1,\dots,k$

$$\tau\circ(\varphi\circ\gamma_i)(t) = \frac{(\varphi\circ\gamma_i)'(t)}{|(\varphi\circ\gamma_i)'(t)|}, \quad t\in(a_i,b_i).$$

Vale il seguente teorema di Stokes.

Teorema 6.3 (**). *Nelle ipotesi e con la notazione di Osservazione 6.4, se $F : S \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di classe C^1 allora si ha*

$$\int_{(S,\nu)} rot\, F = \int_{(\partial S,\tau)} F.$$

7. Formule di Gauss-Green e forme differenziali

Forme differenziali. Siano n, N numeri interi positivi tali che $n \le N$. Indichiamo con $\{dx_i \,|\, i = 1,\dots,N\}$ la base duale della base canonica $\{e_i \,|\, i = 1,\dots,N\}$ di $\mathbb{R}^N$. Se consideriamo una famiglia ordinata di indici

$$\{i_1,\dots,i_n\} \subset \{1,\dots,N\}$$

allora la mappa $dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_n} : (\mathbb{R}^N)^n \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_n})[v_1,\dots,v_n] := \det(v_1|\dots|v_n)_{i_1,\dots,i_n}$$

è un funzionale n-lineare (i.e. esso è lineare rispetto a ciascun argomento v_i) alternante.

Osservazione 7.1. Valgono le seguenti proprietà:

- Se in $i_1,\dots,i_n$ ci sono delle ripetizioni, allora $dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_n} \equiv 0$;
- Se due famiglie di indici $\{i_1,\dots,i_n\}$ e $\{j_1,\dots,j_n\}$ differiscono solo per uno scambio, allora $dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_n} = -\,dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_n}$. Per esempio $dx_1\wedge dx_4\wedge dx_2 = -\,dx_2\wedge dx_4\wedge dx_1$ ($n = 3$ e $N \ge 4$);
- L'insieme $FA_n(\mathbb{R}^N)$ dei funzionali n-lineari alternanti in $\mathbb{R}^N$, con le naturali operazioni di somma e di moltiplicazione per scalare, forma uno spazio vettoriale. La famiglia

$$\left\{dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_n} \,\middle|\, 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_n \le N\right\} \tag{7.1}$$

  è una base di $FA_n(\mathbb{R}^N)$.

DEFINIZIONE 7.1. *Sia U un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$ e consideriamo un campo di funzionali n-lineari alternanti in $\mathbb{R}^N$*

$$\omega : U \to FA_n(\mathbb{R}^N).$$

Se $x \in U$, sia $f_{i_i,\dots,i_n}(x)$ il coefficiente di $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$ nella decomposizione di $\omega(x) \in FA_n(\mathbb{R}^N)$ rispetto alla base (7.1). Allora diremo che "ω è una forma differenziale di classe C^m (in U)" se tutte le funzioni $x \mapsto f_{i_i,\dots,i_n}(x)$ appartengono a $C^m(U)$. La famiglia di tali forme verrà indicata con $FD^m_{n,N}(U)$. Se $n \leq N-1$, $m \geq 1$ e

$$\omega = \sum_{\substack{i_i,\dots,i_n=1\\ i_1<\cdots<i_n}}^{N} f_{i_i,\dots,i_n}(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} \in FD^m_{n,N}(U)$$

allora il "differenziale di ω" è la forma differenziale $d\omega \in FD^{m-1}_{n+1,N}(U)$ definita da

$$d\omega(x) := \sum_{\substack{i_i,\dots,i_n=1\\ i_1<\cdots<i_n}}^{N} \sum_{j=1}^{N} D_j f_{i_i,\dots,i_n}(x)\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}, \qquad x \in U.$$

Campo vettoriale associato a una forma differenziale (caso delle 1-forme in $\mathbb{R}^N$ e caso delle 2-forme in $\mathbb{R}^3$).

DEFINIZIONE 7.2. *Sia U un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$ e $m \geq 0$.*

- *Se*

  $$\omega = \sum_{i=1}^{N} f_i\, dx_i \in FD^m_{1,N}(U)$$

  allora il campo vettoriale $\Phi_\omega \in C^m(U, \mathbb{R}^N)$ definito da

  $$\Phi_\omega(x) := (f_1(x), \dots, f_N(x)), \quad x \in U \tag{7.2}$$

  è detto "il campo di vettori associato a ω";
- *Se ($N = 3$ e)*

  $$\omega = f_{2,3}\, dx_2 \wedge dx_3 + f_{1,3}\, dx_1 \wedge dx_3 + f_{1,2}\, dx_1 \wedge dx_2 \in FD^m_{2,3}(U)$$

  allora il campo vettoriale $\Phi_\omega \in C^m(U, \mathbb{R}^3)$ definito da

  $$\Phi_\omega(x) := (f_{2,3}(x), -f_{1,3}(x), f_{1,2}(x)), \quad x \in U$$

  è detto "il campo di vettori associato a ω".

OSSERVAZIONE 7.2. Tenuto conto di Osservazione 7.1:

- Se

  $$\omega = \sum_{i=1}^{N} f_i\, dx_i \in FD^1_{1,N}(U)$$

allora

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i,j=1}^{N} D_j f_i \, dx_j \wedge dx_i \\
&= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} D_j f_i \, dx_j \wedge dx_i \;+\; \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{N} D_j f_i \, dx_j \wedge dx_i \\
&= -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} D_j f_i \, dx_i \wedge dx_j \;+\; \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{N} D_i f_j \, dx_i \wedge dx_j \\
&= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} (D_i f_j - D_j f_i) \, dx_i \wedge dx_j .
\end{aligned}$$

In particolare:
– se $N = 2$ si ha

$$d\omega = (D_1 f_2 - D_2 f_1) dx_1 \wedge dx_2; \tag{7.3}$$

– se $N = 3$, ricordando che $\Phi_\omega = (f_1, f_2, f_3)$, si ha

$$\Phi_{d\omega} = \operatorname{rot} \Phi_\omega; \tag{7.4}$$

- Se

$$\omega = f_{1,2} \, dx_1 \wedge dx_2 \;+\; f_{1,3} \, dx_1 \wedge dx_3 \;+\; f_{2,3} \, dx_2 \wedge dx_3 \in FD^1_{2,3}(U)$$

allora

$$\begin{aligned}
d\omega = \sum_{j=1}^{3} D_j f_{1,2} \, dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \sum_{j=1}^{3} D_j f_{1,3} \, dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \\
+ \sum_{j=1}^{3} D_j f_{2,3} \, dx_j \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
= (D_1 f_{2,3} - D_2 f_{1,3} + D_3 f_{1,2}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3
\end{aligned}$$

i.e.

$$d\omega = \operatorname{div} \Phi_\omega \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \tag{7.5}$$

[* Dodicesima settimana (02/12/2013); 73 *]

Integrale di una forma differenziale.

Osservazione 7.3. Le seguenti considerazioni mostrano come le forme differenziali siano "oggetti" adatti a riformulare le varie nozioni di integrale orientato precedentemente studiate.

- Siano date una forma differenziale
$$\omega = \sum_{j=1}^{N} f_j \, dx_j \in FD^0_{1,N}(U)$$
e una curva regolare a tratti orientata (Γ, τ) in $\mathbb{R}^N$ con $\Gamma \subset U$. Allora, se
$$\{\gamma_i : C_i \to \mathbb{R}^N \mid i = 1, \dots , k\} \quad (\text{con } C_i = \overline{A_i}, \text{ eccetera})$$
è una qualsiasi parametrizzazione di (Γ, τ), si ha
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} \omega(\gamma_i(x))[\gamma_i'(x)] d\mathcal{L}^1(x) &= \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} \sum_{j=1}^{N} f_j(\gamma_i(x))\gamma_{i,j}'(x) \, d\mathcal{L}^1(x) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} \Phi_\omega(\gamma_i(x)) \cdot \gamma_i'(x) \, d\mathcal{L}^1(x) \\ &= \int_{(\Gamma,\tau)} \Phi_\omega \end{aligned}$$
dove l'ultima uguaglianza segue da Proposizione 6.2. In particolare, l'integrale al primo membro non dipende dalla scelta della parametrizzazione $\{\gamma_i\}$ di (Γ, τ).

- Analogamente, siano date una forma differenziale
$$\omega = f_{1,2} \, dx_1 \wedge dx_2 \; + \; f_{1,3} \, dx_1 \wedge dx_3 \; + \; f_{2,3} \, dx_2 \wedge dx_3 \in FD^0_{2,3}(U)$$
e una superficie regolare a tratti orientata (Σ, ν) con $\Sigma \subset U$. Allora, se
$$\{\varphi_i : C_i \to \mathbb{R}^N \mid i = 1, \dots , k\} \quad (\text{con } C_i = \overline{A_i}, \text{ eccetera})$$
è una qualsiasi parametrizzazione di (Σ, ν), si ha
$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} \omega(\varphi_i(x))[D_1\varphi_i(x), D_2\varphi_i(x)] d\mathcal{L}^2(x) = \\ &\qquad = \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} f_{1,2}(\varphi_i(x))(dx_1 \wedge dx_2)[D_1\varphi_i(x), D_2\varphi_i(x)] d\mathcal{L}^2(x) + \\ &\qquad\quad + \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} f_{1,3}(\varphi_i(x))(dx_1 \wedge dx_3)[D_1\varphi_i(x), D_2\varphi_i(x)] d\mathcal{L}^2(x) + \\ &\qquad\quad + \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} f_{2,3}(\varphi_i(x))(dx_2 \wedge dx_3)[D_1\varphi_i(x), D_2\varphi_i(x)] d\mathcal{L}^2(x) \\ &\qquad = \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} \Phi_\omega(\varphi_i(x)) \cdot \Big(D_1\varphi_i(x) \times D_2\varphi_i(x)\Big) d\mathcal{L}^2(x) \\ &\qquad = \int_{(\Sigma,\nu)} \Phi_\omega \end{aligned}$$
dove l'ultima uguaglianza segue da Proposizione 6.2. In particolare, anche in questo caso, l'integrale al primo membro non dipende dalla scelta della parametrizzazione $\{\varphi_i\}$ di (Σ, ν).

In virtù di Osservazione 7.3 la seguente definizione è ben posta.

DEFINIZIONE 7.3. *L'integrale di $\omega \in FD^0_{1,N}(U)$ su una curva regolare a tratti orientata (Γ, τ) in $\mathbb{R}^N$ con $\Gamma \subset U$ è definito come segue*

$$\int_{(\Gamma,\tau)} \omega := \int_{(\Gamma,\tau)} \Phi_\omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} \omega(\gamma_i(x))[\gamma_i'(x)]d\mathcal{L}^1(x) \tag{7.6}$$

dove

$$\{\gamma_i : C_i \to \mathbb{R}^N \mid i = 1, \dots, k\} \quad \textit{(con } C_i = \overline{A_i}, \textit{ eccetera)}$$

è una qualsiasi parametrizzazione di (Γ, τ).

Analogamente, l'integrale di $\omega \in FD^0_{2,3}(U)$ su una superficie regolare a tratti orientata (Σ, ν) con $\Sigma \subset U$ è definito come segue

$$\int_{(\Sigma,\nu)} \omega := \int_{(\Sigma,\nu)} \Phi_\omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} \omega(\varphi_i(x))[D_1\varphi_i(x), D_2\varphi_i(x)]d\mathcal{L}^2(x) \tag{7.7}$$

dove

$$\{\varphi_i : C_i \to \mathbb{R}^N \mid i = 1, \dots, k\} \quad \textit{(con } C_i = \overline{A_i}, \textit{ eccetera)}$$

è una qualsiasi parametrizzazione di (Σ, ν).

Infine, l'integrale di $\omega = f\, dx_1 \wedge dx_2 \in FD^0_{2,2}(U)$ su un sottoinsieme compatto E di $\mathbb{R}^2$ con $E \subset U$ è definito come segue

$$\int_E \omega = \int_E f\, dx_1 \wedge dx_2 := \int_E f\, d\mathcal{L}^2. \tag{7.8}$$

Analogamente se $\omega = f\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \in FD^0_{3,3}(U)$ ed E è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$ con $E \subset U$, si pone

$$\int_E \omega = \int_E f\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 := \int_E f\, d\mathcal{L}^3. \tag{7.9}$$

Conclusione: unificazione dei teoremi di Green, di Stokes e di Gauss.

TEOREMA DI GREEN. Siano E e τ_E definiti come in Teorema 6.2 e sia

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \in FD^1_{1,2}(U)$$

dove U è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ tale che $E \subset U$. Da Teorema 6.2, (7.2) e (7.8) si ottiene

$$\int_{(\partial E,\tau_E)} \Phi_\omega = \int_{(\partial E,\tau_E)} (f_1, f_2) = \int_E (D_1 f_2 - D_2 f_1)\, d\mathcal{L}^2 = \int_E (D_1 f_2 - D_2 f_1)\, dx_1 \wedge dx_2$$

e cioè, per (7.3) e (7.6):

$$\int_{(\partial E,\tau_E)} \omega = \int_E d\omega.$$

TEOREMA DI STOKES. Assumiamo la notazione e le ipotesi di Osservazione 6.4. Se

$$\omega \in FD^1_{2,3}(U)$$

dove U è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ tale che $S \subset U$, allora

$$\int_{(\partial S,\tau)} \Phi_\omega = \int_{(S,\nu)} \text{rot } \Phi_\omega \int_{(S,\nu)} \Phi_{d\omega}$$

per Teorema 6.3 e (7.4). Ricordandoci ora di (7.6) e (7.7), possiamo riscrivere tale identità come segue:

$$\int_{(\partial S,\tau)} \omega = \int_{(S,\nu)} d\omega.$$

TEOREMA DI GAUSS. Siano E e ν definiti come in Teorema 6.1 e sia

$$\omega \in FD^1_{2,3}(U)$$

dove U è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$ tale che $E \subset U$. Allora

$$\int_{(\partial E,\nu)} \Phi_\omega = \int_E \text{div } \Phi_\omega \, d\mathcal{L}^3 = \int_E \text{div } \Phi_\omega \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

per Teorema 6.1 e (7.9). Grazie a (7.5) e a (7.7), possiamo riscrivere questa identità come segue:

$$\int_{(\partial E,\nu)} \omega = \int_E d\omega.$$

CHAPTER 3

Spazi L^p e serie di Fourier

1. Spazi L^p

OSSERVAZIONE 1.1. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Indichiamo allora con $\mathcal{M}_f$ l'insieme dei maggioranti essenziali di $|f|$ e cioè:

$$\mathcal{M}_f := \{M \geq 0 \,|\, M \geq |f(x)| \text{ per } \mu\text{-q.o. } x\} = \{M \geq 0 \,|\, \mu(\{x \,|\, M < |f(x)|\}) = 0\}.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

- $\mathcal{M}_f$ è una semiretta destra;
- $\mathcal{M}_f$ è chiusa, i.e. $\inf \mathcal{M}_f \in \mathcal{M}_f$.

DEFINIZIONE 1.1. *Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e $p \in [1, +\infty]$. Per ogni funzione misurabile $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, poniamo*

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} & \textit{se } 1 \leq p < +\infty, \\ \min \mathcal{M}_f & \textit{se } p = +\infty. \end{cases}$$

Indicheremo con $L^p(X)$ la classe delle funzioni misurabili $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che $\|f\|_p < \infty$.

TEOREMA 1.1 (*). *Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio con misura, $p \in [1, +\infty]$ e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile. Allora*

(1) $\|f\|_p \geq 0$;

(2) $\|f\|_p = 0$ *se e solo se $f = 0$ quasi ovunque (rispetto a μ);*

(3) $\|cf\|_p = |c| \, \|f\|_p$, *per ogni $c \in \mathbb{R}$.*

TEOREMA 1.2 (Disuguaglianza di Hölder (**)). *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e siano $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni misurabili. Allora*

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

dove $p, p' \in [1, +\infty]$ sono coniugati, cioè verificano una fra le seguenti ipotesi alternative:

(i) $p = 1$ *e* $p' = +\infty$ *(o viceversa);*
(ii) $p, p' \in (1, +\infty)$ *e*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Teorema 1.3 (**). *Siano* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *spazio con misura e* $p \in [1, +\infty]$. *Allora vale la disuguaglianza triangolare*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad (\textit{Disuguaglianza di Minkowski})$$

per ogni $f, g \in L^p(X)$.

Osservazione 1.2. Facendo il quoziente di $L^p(X)$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$f \sim g \quad \text{se e solo se} \quad f = g \text{ q.o. (rispetto a } \mu)$$

si ottiene in modo naturale uno spazio vettoriale. Inoltre la funzione

$$L^p(X)/\sim\ \to [0, +\infty), \quad [f] \mapsto \|f\|_p \tag{1.1}$$

è una norma. Per semplicare la notazione, denoteremo tale spazio spazio vettoriale ancora con $L^p(X)$ e identificheremo $[f]$ con f tutte le volte in cui la formula non dipende dalla scelta della funzione nella classe di equivalenza. Per questo motivo indicheremo la norma (1.1) della classe di equivalenza di f ancora con $\|f\|_p$.

Teorema 1.4 (Fisher-Riesz (***)). *Siano* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *spazio con misura e* $p \in [1, +\infty]$. *Allora lo spazio vettoriale normato* $L^p(X)$ *è uno spazio normato completo.*

Dalla dimostrazione di Teorema 1.4 segue subito il seguente risultato, che enunciamo senza ricorrere alla semplificazione notazionale descritta in Osservazione 1.2.

Proposizione 1.1 (°). *Siano* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *spazio con misura e* $p \in [1, +\infty]$. *Allora ogni successione* $\{f_j\} \subset L^p(X)$ *tale che* $\{[f_j]\}$ *converge in* $L^p(X)/\sim$ *ha una sottosuccessione convergente q.o.*

Osservazione 1.3. In generale una successione convergente in $L^p(X)$ non converge q.o., fatta eccezione per il caso $p = +\infty$ (esempio della "tendina").

[* Tredicesima settimana (09/12/2013); 77 *]

2. Serie di Fourier in uno spazio di Hilbert, un prontuario minimo (meno di così non si può...)

Introdurremo di seguito qualche elemento di teoria degli spazi di Hilbert (il minimo indispensabile per la trattazione delle serie di Fourier che ci siamo dati come obiettivo della parte finale del corso).

Proposizione 2.1 (*). *Se* V *è uno spazio vettoriale con un prodotto scalare* $(\cdot\,,\cdot)$, *allora la funzione*

$$v \mapsto \|v\| := (v, v)^{1/2}, \qquad v \in V$$

è una norma in V.

Definizione 2.1. *Uno spazio vettoriale normato è detto "spazio di Banach" se esso è uno spazio metrico completo rispetto alla metrica indotta dalla sua norma. Uno "spazio di Hilbert" è uno spazio di Banach in cui la norma è indotta da un prodotto scalare.*

OSSERVAZIONE 2.1. Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio con misura e $p \in [1, +\infty]$ allora $L^p(X)$ con la norma $\| \cdot \|_p$ è uno spazio di Banach, per Teorema 1.4. In particolare questo è vero per $p = 2$ e poiché la norma $\| \cdot \|_2$ è indotta dal prodotto scalare

$$(f, g) := \int_X f g \, d\mu \qquad (f, g \in L^2(X)),$$

si ha che $L^2(X)$ con $\| \cdot \|_2$ è uno spazio di Hilbert.

DEFINIZIONE 2.2. *Sia H uno spazio di Hilbert. Allora un sottoinsieme F di H è detto "famiglia ortonormale (in H)" se per ogni $x, y \in F$ si ha*

$$(x, y) = \begin{cases} 0 & se\ x \neq y \\ 1 & se\ x = y. \end{cases}$$

Una "famiglia ortonormale completa (in H)" è una famiglia ortonormale F che soddisfa la seguente condizione: se $h \in H$ è tale che $(h, x) = 0$ per ogni $x \in F$ allora si ha $h = 0$.

PROPOSIZIONE 2.2 (*). *Sia F una famiglia ortonormale in uno spazio di Hilbert H e si indichi con Γ lo spazio vettoriale delle combinazioni lineari finite di elementi di F. Se Γ è denso in H allora F è una famiglia ortonormale completa.*

Come applicazione del Lemma di Zorn si prova facilmente l'esistenza di famiglie ortonormali complete, e.g. [**8**, Theorem 8.44].

TEOREMA 2.1. *Ogni spazio di Hilbert H contiene una famiglia ortonormale completa. Se H è separabile allora ogni famiglia ortonormale (in particolare, ogni famiglia ortonormale completa) è numerabile.*

TEOREMA 2.2 (***). *Sia $F = \{u_1, u_2, \dots\}$ una famiglia ortonormale numerabile in uno spazio di Hilbert H. Valgono allora i seguenti fatti:*

(1) *Se $h \in H$ e $c_1, c_2, \dots$ sono numeri reali, si ha*
$$\Big\| h - \sum_{i=1}^{m} (h, u_i) u_i \Big\| \leq \Big\| h - \sum_{i=1}^{m} c_i u_i \Big\|$$
per ogni $m \geq 1$. Inoltre l'uguaglianza vale se e solo se $c_i = (h, u_i)$, per $i = 1, \dots, m$;

(2) *Per ogni $h \in H$ si ha $\sum_i (h, u_i)^2 \leq \|h\|^2$ (disuguaglianza di Bessel);*

(3) *Siano $c_1, c_2, \dots$ numeri reali. Allora $\sum_i c_i u_i$ converge in H se e soltanto se $\sum_i c_i^2 < +\infty$. In particolare, per ogni $h \in H$, la serie $\sum_i (h, u_i) u_i$ converge in H;*

(4) *Se F è completa, per ogni $h \in H$ si ha $\sum_i (h, u_i) u_i = h$. In particolare la serie $\sum_i (h, u_i) u_i$ converge incondizionatamente.*

Un'importante applicazione della teoria precedente si ottiene considerando lo spazio con misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ indotto dalla misura esterna $\mathcal{L}^1 \llcorner (-\pi, \pi)$ e prendendo il corrispondente spazio di Hilbert $H := L^2(-\pi,\pi)$, cfr. Osservazione 2.1. Si tratta della cosiddetta "teoria L^2 delle serie di Fourier" che qui descriveremo sommariamente.

Prima di tutto è facile provare che il "sistema trigonometrico"

$$F := \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \bigcup \left\{\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\,,\ \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{2.1}$$

è una famiglia ortonormale in $L^2(-\pi,\pi)$. Da Teorema 2.2 si ottiene allora che per ogni $f \in L^2(-\pi,\pi)$ la "serie di Fourier di f" definita come segue

$$\frac{1}{2\pi}(f,1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}(f,\cos nt)\cos nt + \frac{1}{\pi}(f,\sin nt)\sin nt\right] \tag{2.2}$$

converge in $L^2(-\pi,\pi)$.

In realtà l'insieme F definito in (2.1) è una famiglia ortonormale completa. Questo fatto si può dimostrare utilizzando i seguenti due risultati di approssimazione, che enunciamo soltanto. Il primo si ottiene per regolarizzazione mediante prodotto di convoluzione [**1**, Corollario IV.23], mentre il secondo è una conseguenza del Teorema di Stone-Weierstrass [**5, 14**].

Teorema 2.3. *Lo spazio vettoriale* $C_c(-\pi,\pi)$ *è denso in* $(L^2(-\pi,\pi)\,,\,\|\cdot\|_2)$.

Teorema 2.4. *Sia* $\varphi \in C(K)$*, con* K *un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{R}^n$*. Allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un polinomio* $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tale che* $\sup_K |\varphi - P| \le \varepsilon$.

Infatti, da Teorema 2.3 e Teorema 2.4 otteniamo:

Corollario 2.1 (**). *Le combinazioni lineari finite di elementi del sistema trigonometrico (2.1) formano uno spazio vettoriale denso in* $(L^2(-\pi,\pi)\,,\,\|\cdot\|_2)$*. Quindi, per Proposizione 2.2, il sistema trigonometrico è una famiglia ortonormale completa.*

Da Corollario 2.1 e Teorema 2.2(4) segue ora subito il seguente risultato.

Corollario 2.2 (°). *Per ogni* $f \in L^2(-\pi,\pi)$*, la serie di Fourier (2.2) converge incondizionatamente a* f *in* $(L^2(-\pi,\pi)\,,\,\|\cdot\|_2)$.

Combinando Corollario 2.2 e Proposizione 1.1, otteniamo:

Corollario 2.3 (°). *Se* $f \in L^2(-\pi,\pi)$*, allora esiste una sottosuccessione di*

$$S_N(t) := \frac{1}{2\pi}(f,1) + \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{\pi}(f,\cos nt)\cos nt + \frac{1}{\pi}(f,\sin nt)\sin nt\right] \tag{2.3}$$

che converge puntualmente quasi ovunque in $(-\pi,\pi)$.

Osservazione 2.2. Nel 1915 Lusin pose la questione della convergenza quasi ovunque di "tutta" la successione (2.3). La risposta affermativa venne oltre cinquant'anni dopo, in un profondo lavoro di Lennart Carleson [**2**].

[* Quattordicesima settimana (16/12/2013); 84 *]

3. Convergenza puntuale della serie di Fourier per una funzione regolare a tratti

Per questa ultima parte del corso, la bibliografia di riferimento è il secondo capitolo dell'opera [**9**].

Definizione 3.1. *Sia data una funzione 2π-periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora:*

(i) *f è detta "continua a tratti" se*
   – *L'insieme D dei punti di discontinuità di f in $[-\pi, \pi)$ è vuoto o finito*
   – *per ogni $x_0 \in D$ esistono finiti i limiti sinistro e destro*
$$f(x_0 - 0) := \lim_{x \to x_0 -} f(x), \qquad f(x_0 + 0) := \lim_{x \to x_0 +} f(x);$$

(ii) *f è detta "regolare a tratti" se:*
   – *è continua a tratti secondo la descrizione data in (i);*
   – *esiste un sottoinsieme finito E di $[-\pi, \pi)$ tale che $E \supset D$ e f ha derivata continua ed equilimitata in $[-\pi, \pi) \backslash E$.*

Vale il seguente risultato sulla convergenza puntuale e sulla convergenza puntuale uniforme.

Teorema 3.1 (***). *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica e regolare a tratti. Allora:*

(1) *Per ogni $x \in \mathbb{R}$, la serie di Fourier di f in x è uguale a*
$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$
In particolare, se f è continua in x, allora la serie di Fourier di f in x è uguale a $f(x)$.

(2) *Se f è continua, la sua serie di Fourier converge totalmente in $L^\infty(\mathbb{R})$ (e quindi uniformemente) a f.*

Osservazione 3.1. Consideriamo una funzione 2π-periodica e continua a tratti $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora possiamo scrivere la serie di Fourier di f:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{3.1}$$

dove

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

e

$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Si vede subito che:

(1) Se f è dispari, la (3.1) è una "serie di soli seni", cioè $a_n = 0$ per ogni n e si ha

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt \qquad (n = 1, 2, \dots);$$

(2) Se f è pari, la (3.1) è una "serie di soli coseni", cioè $b_n = 0$ per ogni n e si ha

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Osservazione 3.2. Naturalmente la teoria della serie di Fourier che abbiamo presentato per le funzioni 2π-periodiche può essere "riformulata" per le funzioni $2L$-periodiche: basta rifare tutto applicando i risultati astratti allo spazio di Hilbert $H := L^2(-L, L)$, dove lo spazio con misura considerato stavolta è quello indotto da $\mathcal{L}^1 \llcorner (-L, L)$. Per cominciare, il sistema trigonometrico da utilizzare in questo caso è

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2L}}\right\} \bigcup \left\{\frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{\pi}{L}nt\, ,\ \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\frac{\pi}{L}nt\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Eccetera.

Osservazione 3.3. Dalle serie di Fourier di può ottenere una funzione continua in $\mathbb{R}$ (e 2π-periodica) che non è derivabile in alcun punto, si veda per esempio [**10**, Cap. 2, Sez. 6].

Bibliography

[1] H. Brezis: Analisi funzionale, teoria e applicazioni. Liguori Editore 1986.
[2] L. Carleson: On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. **116**, 135-157 (1966).
[3] L.C. Evans, R.F. Gariepy: Lecture Notes on Measure Theory and Fine Properties of Functions. (Studies in Advanced Math.) CRC Press 1992.
[4] K.J. Falconer: The geometry of fractal sets. (Cambridge Tracts in Math. 85.) Cambridge University Press 1985.
[5] M. Giaquinta, G. Modica: Analisi Matematica 3; strutture lineari e metriche, continuità. Pitagora Ed. Bologna 2000.
[6] M. Giaquinta, G. Modica: Analisi Matematica 4; funzioni di più variabili. Pitagora Ed. Bologna 2005.
[7] M. Giaquinta, G. Modica: Analisi Matematica 5; funzioni di più variabili (ulteriori sviluppi). Pitagora Ed. Bologna 2005.
[8] R.F. Gariepy, W.P. Ziemer: Modern real analysis. PSW Publishing Company 1995.
[9] E. Giusti: Analisi matematica 2. Bollati Boringhieri 2003.
[10] E. Giusti: Esercizi e complementi di analisi matematica, volume secondo. Bollati Boringhieri 2000.
[11] P. Mattila: Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Cambridge University Press 1995.
[12] H.L. Royden: Real Analysis. Prentice Hall College 1988.
[13] W. Rudin: Principles of mathematical analysis. McGraw-Hill 1976.
[14] http://en.wikipedia.org/wiki/Stone-Weierstrass