Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA III
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2013/2014

5 febbraio 2014

1. Per $t \in (0,1]$, sia E_t l'insieme dei punti (x,y) soddisfacenti la disequazione

$$x^2 + \frac{y^2}{t^2} \leq 1$$

e sia V_t il solido ottenuto da una rotazione completa di E_t intorno all'asse x. Rappresentare graficamente l'insieme E_t, calcolare esplicitamente il numero $\mathcal{L}^3(V_t)$ e disegnare il grafico della funzione $t \mapsto \mathcal{L}^3(V_t)$ per $t \in (0,1]$.

2. Calcolare

$$\int_\Gamma \sqrt{2y(x^2+z^2)}\, d\mathcal{H}^1(x,y,z)$$

dove Γ è la curva ottenuta dall'intersezione del cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$ col cono $z = (x^2+y^2)^{1/2}$.

3. Siano dati il sottoinsieme compatto E del primo quadrante del piano cartesiano limitato dalle curve

$$y = x^2, \quad y = x^2 + 1, \quad y = 1, \quad y = 3.$$

e il campo di vettori

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) := (y, x^2 y + x).$$

Servirsi del teorema di Green per calcolare

$$\int_{(\partial E, \tau_E)} F$$

dove τ_E è il campo vettoriale unitario che orienta positivamente ∂E.