

Prova scritta di
ANALISI MATEMATICA III
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2013/2014

8 settembre 2014

1. Indicata con Σ la superficie della sfera di raggio 2 centrata nel punto $(0, 0, 2)$, definiamo

$$S := \{(x, y, z) \in \Sigma \mid x \leq y \leq x\sqrt{3}, z \leq 2\}.$$

Calcolare

$$\int_S xy(2-z) d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

2. Usare il teorema di Stokes per provare che se \overline{D} è un qualsiasi disco orientato in \mathbb{R}^3 con centro nell'origine, allora

$$\int_{\partial \overline{D}} (z, z\sqrt{2}, x + y\sqrt{2}) = 0.$$

In seguito, verificare tale uguaglianza mediante il calcolo diretto nel caso speciale in cui il disco D sia unitario e incluso nel piano $z = y$.

3. Si consideri il tronco di cono

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \geq x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 2\}.$$

Si applichi allora il teorema di Gauss per calcolare l'integrale

$$\int_{(\partial T, \nu)} (y + 2z) dx \wedge dy + (2y - \sin x) dx \wedge dz + xz dy \wedge dz$$

dove ν indica il campo normale esterno.