Prova scritta del 2 settembre 2015

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1

- Per $x = 0$ la serie si riduce a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n$$
e quindi diverge. Per $x \neq 0$ e $n \geq 1$ vale la seguente stima per l'addendo $f_n(x)$ della serie
$$0 < f_n(x) := \frac{n(x^2+1)}{n^3x^2+1} < \frac{n(x^2+1)}{n^3x^2} = \frac{x^2+1}{x^2} \times \frac{1}{n^2} \tag{1}$$
e quindi la serie converge;

- Posto (per $a > 0$) $J_a := (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ e ricordando (1), si trova
$$0 < f_n(x) < \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{n^2} \leq \left(1 + \frac{1}{a^2}\right)\frac{1}{n^2}$$
per ogni $x \in J_a$ e per ogni $n \geq 1$. Quindi
$$\|f_n\|_{\infty, J_a} \leq \left(1 + \frac{1}{a^2}\right)\frac{1}{n^2}$$
da cui segue subito la convergenza totale in $L^\infty(J_a)$;

- Come abbiamo visto, la serie converge totalmente in $L^\infty(J_a)$ e quindi uniformemente in J_a, per ogni $a > 0$. Quindi la somma della serie è continua in J_a, per ogni $a > 0$. Da ciò segue subito che la somma è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Esercizio 2

Osserviamo che per ogni $\rho \in [-1,1]$, $\rho \neq 0$, si ha

$$\frac{\gamma(\rho)-\gamma(0)}{\rho} = \left(1, \rho\cos\frac{1}{\rho}, \rho\sin\frac{1}{\rho}\right).$$

Quindi esiste il limite di tale rapporto incrementale, per $\rho \to 0^+$, e si ha

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\gamma(\rho)-\gamma(0)}{\rho} = (1,0,0).$$

Di conseguenza se γ è differenziabile in 0, deve essere $[d\gamma(0)] = (1,0,0)^t$. In base a quest'osservazione diventa facile provare che γ è effettivamente differenziabile in 0. Infatti si ha (per $\rho \neq 0$)

$$\begin{aligned} |\gamma(\rho) - [\gamma(0) + (1,0,0)\rho]| &= \left|\left(0, \rho^2\cos\frac{1}{\rho}, \rho^2\sin\frac{1}{\rho}\right)\right| \\ &= |\rho| \times \left|\left(0, \rho\cos\frac{1}{\rho}, \rho\sin\frac{1}{\rho}\right)\right| \end{aligned}$$

da cui

$$\gamma(\rho) - [\gamma(0) + (1,0,0)\rho] = o(\rho).$$

I punti di massimo assoluto e di minimo assoluto di $\varphi|_{\gamma([-1,1])}$ esistono per il teorema di Weierstrass. Per determinarli basterà studiare la funzione $g := \varphi\circ\gamma$. Si vede subito che vale (per $\rho \in [-1,1]$)

$$g(\rho) = \rho^2 - \rho^4$$

da cui

$$g'(\rho) = 2\rho - 4\rho^3 = 2\rho(1-2\rho^2).$$

Dallo studio del segno di g', si vede subito che:

- Il minimo assoluto di g (e quindi di $\varphi|_{\gamma([-1,1])}$) è 0 ed è conseguito in $\rho = 0$ e in $\rho = \pm 1$. Quindi i punti di minimo assoluto di $\varphi|_{\gamma([-1,1])}$ sono

$$\gamma(0) = 0, \quad \gamma(-1) = (-1, \cos 1, -\sin 1), \quad \gamma(1) = (1, \cos 1, \sin 1);$$

- Il massimo assoluto di g (e quindi di $\varphi|_{\gamma([-1,1])}$) è $1/4$ ed è conseguito in $\rho = \pm 1/\sqrt{2}$. Quindi i punti di minimo assoluto di $\varphi|_{\gamma([-1,1])}$ sono

$$\gamma(-1/\sqrt{2}) = (-1/\sqrt{2}, (\cos\sqrt{2})/2, -(\sin\sqrt{2})/2)$$

e

$$\gamma(1/\sqrt{2}) = (1/\sqrt{2}, (\cos\sqrt{2})/2, (\sin\sqrt{2})/2).$$

Esercizio 3

Poiché l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 3\lambda + \frac{9}{4} = 0$$

ha solo una radice reale, uguale a $3/2$, la soluzione generale della EDO omogenea associata è

$$C_1 e^{3x/2} + C_2 x e^{3x/2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Cerchiamo una soluzione particolare della forma $ax + b$. Sostituendo nella EDO da risolvere, troviamo

$$-3a + \frac{9}{4}(ax + b) = \frac{9}{4}x + 6$$

da cui si ricava

$$a = 1, \quad b = 4.$$

La soluzione generale è quindi

$$C_1 e^{3x/2} + C_2 x e^{3x/2} + x + 4 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Da questa otteniamo infine C_1 e C_2 tali che valgano le condizioni $y(0) = 5$ e $y(1) = 5$. Infatti, sostituendo, troviamo subito

$$C_1 + 4 = 5, \quad (C_1 + C_2)e^{3/2} + 5 = 5$$

da cui segue $C_1 = 1$ e $C_2 = -1$ (per cui la soluzione corrispondente è $e^{3x/2} - x e^{3x/2} + x + 4$).