Prova scritta del 14 gennaio 2016

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1

Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n y^n$$

con $a_n := n \sin(1/n)$. Il raggio di convergenza di tale serie vale

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(1/(n+1)}{1/(n+1)} \times \frac{1/n}{\sin(1/n)} = 1.$$

Osserviamo che tale serie non converge in ± 1, quindi essa converge puntualmente in $(-1, 1)$. Se ne conclude che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (2x+1)^n$$

converge in x se e solo se $-1 < 2x + 1 < 1$, i.e. $x \in (-1, 0)$.

Esercizio 2

Osserviamo che $F^{-1}(0)$ è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 7x + y + z = 0 \end{cases}$$

e cioè l'intersezione fra un cilindro e un piano ad esso trasversale. Quindi $F^{-1}(0)$ è un'ellisse, che è ovviamente un insieme compatto.

Inoltre si ha

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui si vede facilmente che il rango è sempre 2. Se non fosse così, infatti, esisterebbe un punto dell'ellisse $F^{-1}(0)$ in cui i tre minori massimali di DF hanno determinante nullo, ossia

$$\begin{cases} 2x = 14y \\ 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

da cui $x = y = 0$, che ovviamente non può accadere per nessun punto di $F^{-1}(0)$.

I punti di massimo e di minimo assoluti di $\varphi|_{F^{-1}(0)}$, che esistono per il teorema di Weierstrass, soddisfano il seguente sistema (in cui λ_1 e λ_2 sono i moltiplicatori di Lagrange)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 7x + y + z = 0 \\ 7 = 2x\lambda_1 + 7\lambda_2 \\ 2y = 2y\lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = \lambda_2. \end{cases}$$

Si trova che i punti (x,y,z) soddisfacenti tale sistema sono

$$(0,1,-1); \quad (0,-1,1); \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{2}\right); \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2}\right).$$

Calcolando il valore di φ in tali punti, si ottiene rispettivamente

$$0; \quad 2; \quad -\frac{1}{4}; \quad -\frac{1}{4}.$$

Quindi $(0,-1,1)$ è il punto in cui φ assume il valore massimo 2, mentre

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$$

sono i punti in cui φ assume il valore minimo $-1/4$.

Esercizio 3

Le soluzioni dell'equazione caratteristica $2\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ relativa alla EDO omogenea associata sono

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i, \qquad \lambda_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Quindi la soluzione generale della EDO omogenea associata è

$$C_1 e^{-3x/2} \cos(3x/2) + C_2 e^{-3x/2} \sin(3x/2)$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie.

Cerchiamo poi una soluzione particolare della forma $y(x) = ax+b$, sostituendola nell'equazione. Poiché $y''(x) = 0$ e $y'(x) = a$, otteniamo:

$$6a + 9ax + 9b = 9x - 3$$

da cui si ricava subito

$$a = 1, \quad b = -1.$$

Perciò la soluzione generale è

$$C_1 e^{-3x/2} \cos(3x/2) + C_2 e^{-3x/2} \sin(3x/2) + x - 1.$$

Infine, il sistema differenziale in forma normale equivalente è

$$\begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9/2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (9x-3)/2 \end{pmatrix}.$$