Prova scritta del 18 giugno 2015

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1

Poniamo

$$\Sigma_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > x\}, \quad \Sigma_- := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y < x\}$$

e

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x\} = \mathbb{R}^2 \setminus (\Sigma_+ \cup \Sigma_-).$$

Continuità. Poiché $f|_D \equiv 0$, la funzione $f|_{D\cup\Sigma_+}$ è identicamente nulla e quindi, in particolare, continua. Anche la funzione $f|_{D\cup\Sigma_-}$ è ovviamente continua. Ne consegue facilmente che f è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$.

Esistenza di ∇f. Naturalmente ∇f esiste in $\Sigma_+ \cup \Sigma_-$ e si ha

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} (0,0) & \text{se } (x,y) \in \Sigma_+ \\ (\sin y, -\sin y + (x-y)\cos y) & \text{se } (x,y) \in \Sigma_-. \end{cases}$$

Inoltre, se $(x,x) \in D$:

- Vale l'uguaglianza

  $$\frac{f(x+h,x) - f(x,x)}{h} = \begin{cases} \sin x & \text{se } h > 0 \\ 0 & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

  e quindi

  $$\lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h,x) - f(x,x)}{h} = \sin x, \quad \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h,x) - f(x,x)}{h} = 0$$

- Vale l'uguaglianza

  $$\frac{f(x,x+h) - f(x,x)}{h} = \begin{cases} 0 & \text{se } h > 0 \\ -\sin(x+h) & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

  e quindi

  $$\lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h,x) - f(x,x)}{h} = 0, \quad \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h,x) - f(x,x)}{h} = -\sin x.$$

Quindi $\nabla f(x,x)$ esiste se e solo se $x = k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) e si ha

$$\nabla f(k\pi, k\pi) = (0,0).$$

Differenziabilità di f. Poiché $f|_{\Sigma_- \cup \Sigma_+} \in C^1(\Sigma_- \cup \Sigma_+)$, la funzione f è differenziabile in ogni punto di $\Sigma_- \cup \Sigma_+$. Rimane da studiare la differenziabilità di f nei punti di D. A questo proposito osserviamo che, per il punto precedente, la funzione f non può essere differenziabile nei punti di D diversi da $(k\pi, k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$. In questi ultimi punti invece f risulta essere differenziabile. Infatti, per ogni $(r,s) \neq (0,0)$ si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{|f(k\pi + r, k\pi + s) - [f(k\pi, k\pi) + (0,0) \cdot (r,s)]|}{\sqrt{r^2 + s^2}} &= \frac{|f(k\pi + r, k\pi + s)|}{\sqrt{r^2 + s^2}} \\
&\leq \frac{|r - s|\,|\sin(k\pi + s)|}{\sqrt{r^2 + s^2}} \\
&= \frac{|r - s|\,|\sin s|}{\sqrt{r^2 + s^2}} \\
&\leq |r - s|.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Osserviamo prima di tutto che la funzione f è continua e che D è compatto. Quindi, per il teorema di Weierstrass, f ha massimo e minimo (globali). Si ha poi

$$\nabla f(x, y) = (2x - 1, 2y)$$

e quindi la funzione data ha un unico punto stazionario in $(1/2, 0)$. Dato che tale punto appartiene alla frontiera di D, la funzione f non ha punti di estremo locale interni a D. Non rimane quindi che studiare $f|_{\partial D}$. A questo scopo osserviamo che ∂D è l'unione del segmento S parametrizzato da

$$\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := (t, 0)$$

e della semicirconferenza C parametrizzata da

$$\lambda : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \lambda(t) := (\cos t, \sin t).$$

Si ha:

$$f(\gamma(t)) = t^2 - t, \quad f(\lambda(t)) = 1 - \cos t$$

e quindi:

- Il minimo di $f|_S$ è conseguito in $(1/2, 0)$ e vale $-1/4$;
- Il massimo di $f|_S$ è conseguito in $(-1, 0)$ e vale 2;
- Il minimo di $f|_C$ è conseguito in $(1, 0)$ e vale 0;
- Il massimo di $f|_C$ è conseguito in $(-1, 0)$ e vale 2;
- Il punto $(1, 0)$ è di massimo locale per $f|_S$ e di minimo globale per $f|_C$.

Ecco quindi le conclusioni:

- Il minimo globale di f è $-1/4$ ed è conseguito solo in $(1/2, 0)$;
- Il massimo globale di f è 2 ed è conseguito solo in $(-1, 0)$;
- Non esistono punti di estremo locale diversi dai punti di estremo globale.

Esercizio 3

Si ha in effetti che vale la CDI:

$$D_1F_2(x,y) = D_2F_1(x,y) = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Da questo si può dedurre immediatamente (Cap. 4, Prop. 1.5) che il campo ha un potenziale, in quanto le componenti connesse del dominio sono

$$(-\infty,-1)\times\mathbb{R}, \quad (-1,+\infty)\times\mathbb{R},$$

e sono insiemi stellati. Se indichiamo con φ un potenziale, da $D_2\varphi(x,y) = \frac{1}{x+1}$ si ricava subito

$$\varphi(x,y) = \frac{y}{x+1} + c(x).$$

Da $D_1\varphi(x,y) = \frac{-1-y}{(x+1)^2}$ segue ora che

$$-\frac{y}{(x+1)^2} + c'(x) = \frac{-1-y}{(x+1)^2}$$

i.e.

$$c'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

da cui (per esempio)

$$c(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Quindi un potenziale è dato da

$$\varphi(x,y) = \frac{y+1}{x+1}.$$

A questo punto (Cap. 4, Prop. 1.1) si ottiene

$$\int_{\{\gamma\}} F = \varphi(\gamma(\pi)) - \varphi(\gamma(0)) = \varphi(e^\pi,0) - \varphi(1,0) = \frac{1}{1+e^\pi} - \frac{1}{2}.$$