Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA III
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2014/2015

7 settembre 2015

1. Calcolare
$$\int_E ye^x \, dxdy$$
dove E indica la regione limitata del piano racchiusa dalle curve
$$y = e^x, \quad y = 2e^x, \quad y = e^{-x}, \quad y = 3e^{-x}.$$

2. Data la superficie
$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, \, x^2 + y^2 \leq 1\},$$
sia ν il campo continuo normale a S avente la terza componente positiva. Inoltre sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito come segue
$$F(x, y, z) := \Big(xye^z \, , \, e^{x^2+y^2} \, , \, \sin(xyz)\Big) \, .$$

- Calcolare $\operatorname{rot} \mathrm{F}$ in (x, y, z) e ν in $(x, y, x^2 + y^2) \in S$;
- Usare il teorema di Stokes per calcolare
$$\int_{(S,\nu)} \operatorname{rot} \mathrm{F}.$$

3. Si considerino le due funzioni 2π-periodiche $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che
$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \in [-\pi, \pi) \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
e
$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \in [-\pi, \pi) \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- Stabilire se f e g siano o meno regolari a tratti;
- Elencare le proprietà relative alla convergenza delle serie di Fourier di f e di g, in base a quanto stabilito nel punto precedente e alla teoria della serie di Fourier svolta nel corso.