Prova scritta del 6 luglio 2015

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1

Osserviamo che

$$\Gamma_z = C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + (y-1)^2 \leq 4\}, \quad z \in [0,2]$$

mentre si ha ovviamente $\Gamma_z = \emptyset$ per ogni $z \in \mathbb{R} \setminus [0,2]$. Allora, per il teorema di Fubini, si ha

$$I := \int_\Gamma (x^2 + y^2 - 2y) e^z \, d\mathcal{L}^3(x,y,z) = \int_0^2 e^z \left(\int_C (x^2 + y^2 - 2y)\, dxdy \right) dz.$$

Considerando la $(2,2)$-parametrizzazione

$$\varphi(\rho, \theta) := (\rho\cos\theta, 1 + \rho\sin\theta), \quad (\rho,\theta) \in R := [1,2] \times [0, 2\pi]$$

si ha $C = \varphi(R)$ e quindi, per la formula dell'area (osservando che $J\varphi(\rho,\theta) = \rho$) e per il teorema di Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_C (x^2 + y^2 - 2y)\, dxdy &= \int_R [\rho^2\cos^2\theta + (1+\rho\sin\theta)^2 - 2(1+\rho\sin\theta)]\rho \, d\rho d\theta \\
&= \int_R (\rho^3 - \rho)\, d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 (\rho^3 - \rho)\, d\rho \right) d\theta \\
&= 2\pi \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^2}{2} \right)_{\rho=1}^{\rho=2} \\
&= 2\pi \left(4 - 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{9\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$I = \frac{9\pi}{2} \int_0^2 e^z \, dz = \frac{9\pi(e^2 - 1)}{2}.$$

Esercizio 2

Poiché $|z| \leq 1$, si ha $2 - z^2 \geq 1$ e quindi anche

$$0 < \frac{1}{\sqrt{2 - z^2}} \leq 1.$$

Una $(2,3)$-parametrizzazione di S è evidentemente la seguente:

$$\varphi(\rho, \theta) := (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, \cos\rho), \quad (\rho, \theta) \in R := [0, \pi/2] \times [0, 2\pi].$$

Si vede subito che

$$J\varphi(\rho, \theta) = \|D_1\varphi(\rho, \theta) \times D_2\varphi(\rho, \theta)\| = \rho\sqrt{1 + \sin^2\rho}$$

per ogni $(\rho, \theta) \in (0, \pi/2) \times (0, 2\pi)$. Dalla formula dell'area e dal teorema di Fubini si ottiene allora

$$\begin{aligned}
\int_S \frac{1}{\sqrt{2 - z^2}}\, d\mathcal{H}^2(x, y, z) &= \int_R \frac{1}{\sqrt{2 - \cos^2\rho}}\, \rho\sqrt{1 + \sin^2\rho}\, d\rho d\theta \\
&= \int_R \rho\, d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \rho\, d\rho \right) d\theta \\
&= \frac{\pi^3}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Dal Teorema di Gauss 2D e dal teorema di Fubini si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_{(\partial E,\nu)} \left(\ln(1+y),(x+y)^2\right) &= \int_E \operatorname{div}\left(\ln(1+y),(x+y)^2\right)\, dxdy \\
&= \int_E 2(x+y)\, dxdy \\
&= 2\int_1^2 \left(\int_0^x (x+y)\, dy\right)\, dx \\
&= 2\int_1^2 \left(xy+\frac{y^2}{2}\right)_{y=0}^{y=x}\, dx \\
&= 2\int_1^2 \frac{3}{2}x^2\, dx \\
&= 7.
\end{aligned}$$