Prova scritta del 7 settembre 2015

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1

Introduciamo due nuove variabili s e t tali che

$$\begin{cases} y = se^{x} \\ y = te^{-x} \end{cases}$$

con

$$(s,t) \in R := [1,2] \times [1,3]$$

Risolvendo tale sistema rispetto a (s,t) otteniamo

$$x = \frac{1}{2}\ln(t/s), \qquad y = (st)^{1/2}.$$

Poniamo quindi

$$\varphi(s,t) := \left(\frac{1}{2}\ln(t/s)\,,\,(st)^{1/2}\right), \qquad (s,t) \in R$$

e osserviamo che φ è una $(2,2)$-parametrizzazione regolare. Un semplice calcolo mostra che

$$J\varphi(s,t) = \frac{1}{2}(st)^{-1/2}$$

e quindi, applicando la formula dell'area (cambiamento di variabile) e il teorema di Fubini, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{E=\varphi(R)} ye^{x}dxdy &= \int_R (st)^{1/2}(t/s)^{1/2} \times \frac{1}{2}(st)^{-1/2}\,dsdt \\
&= \int_R \frac{t^{1/2}}{2s^{1/2}}\,dsdt \\
&= \int_1^2 \left(\int_1^3 \frac{t^{1/2}}{2s^{1/2}}\,dt\right) ds \\
&= \int_1^2 \frac{1}{2s^{1/2}}\,ds \int_1^3 t^{1/2}\,dt \\
&= (s^{1/2})_1^2 \left(\frac{2}{3}\,t^{3/2}\right)_1^3 \\
&= \frac{2}{3}\left(2^{1/2}-1\right)\left(3^{3/2}-1\right).
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Primo punto. Si ha

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot} F(x,y,z) &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ xye^z & e^{x^2+y^2} & \sin(xyz) \end{pmatrix} \\
&= \big(xz\cos(xyz)\,,\ -yz\cos(xyz) + xye^z\,,\ 2xe^{x^2+y^2} - xe^z\big).
\end{aligned}
$$

Inoltre, posto

$$\varphi(x,y) := (x, y, x^2+y^2), \text{ con } x^2+y^2 \le 1$$

si ha

$$\nu(\varphi(x,y)) = \frac{D_1\varphi \times D_2\varphi}{|D_1\varphi \times D_2\varphi|}(x,y) = \frac{(-2x,-2y,1)}{(1+4x^2+4y^2)^{1/2}}.$$

Secondo punto. Una parametrizzazione di $\partial(S,\nu)$ è data da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Quindi, applicando il teorema di Stokes, si ottiene

$$
\begin{aligned}
\int_{(S,\nu)} \operatorname{rot} F &= \int_{\partial(S,\nu)} F \\
&= \int_0^{2\pi} \big(e\cos t\sin t, e, \sin(\cos t \sin t)\big) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt \\
&= e\int_0^{2\pi} (1-\sin^2 t)\cos t\, dt \\
&= e\int_0^{2\pi} (1-\sin^2 t)\sin' t\, dt \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Esercizio 3

Indicati con D_f e D_g, rispettivamente, l'insieme dei punti di discontinuità di f e l'insieme dei punti di discontinuità di g, osserviamo subito che si ha

$$D_f = \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \qquad D_g = \emptyset.$$

Inoltre per $h \neq 0$ (con $|h|$ sufficientemente piccolo) si ha

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \cos\frac{1}{h}, \qquad \frac{g(h) - g(0)}{h} = h\cos\frac{1}{h}.$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} & \text{se } x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}, \\ \text{non esiste} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e

$$g'(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si vede allora subito che

- La funzione f non è regolare a tratti (f' è illimitata sul complementare di qualsiasi insieme finito);
- La funzione g è regolare a tratti.

Riguardo la convergenza delle serie di Fourier di f e di g, che per semplicità indicheremo con Σ_f e Σ_g rispettivamente, si può pertanto asserire che:

- Per il teorema di convergenza puntuale per le serie di Fourier, Σ_g converge totalmente in $L^\infty(\mathbb{R})$ (quindi anche uniformemente, puntualmente, in $L^2(-\pi, \pi)$) a g;
- Poiché $f|_{(-\pi,\pi)} \in L^2(-\pi, \pi)$, allora Σ_f converge in $L^2(-\pi, \pi)$ a $f|_{(-\pi,\pi)}$;
- Per il teorema di Carleson, Σ_f converge puntualmente quasi ovunque a f.