Prova scritta del 5 luglio 2016

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1

Osserviamo che
$$f(x, y) = g(xy), \text{ per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$
dove
$$g(0) := 1, \quad g(t) := \frac{\sin t}{t}, \text{ se } t \neq 0.$$
Inoltre g è derivabile (e quindi differenziabile) in ogni $t \in \mathbb{R}$. Questo è ovvio se $t \neq 0$, mentre segue dal teorema di de l'Hopital se $t = 0$:
$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\sin h}{h} - 1\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h - h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{2h} = 0.$$
Poiché anche $(x, y) \mapsto xy$ è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ (in quanto è di classe C^1), da (1) e dal teorema di differenziabilità delle funzioni composte segue che f è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2

Dalla risoluzione del primo esercizio sappiamo che f è continua e $f|_{(0,1)^2}$ è differenziabile. Inoltre, per ogni $(x, y) \in (0, 1)^2$ si ha

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \left(\frac{xy\cos(xy) - \sin(xy)}{x^2 y} , \frac{xy\cos(xy) - \sin(xy)}{xy^2} \right) \\ &= \left(\frac{\cos(xy)[xy - \tan(xy)]}{x^2 y} , \frac{\cos(xy)[xy - \tan(xy)]}{xy^2} \right) \\ &\neq (0, 0).\end{aligned}$$

Quindi, per il teorema di Weierstrass, la funzione f ha massimo globale e minimo globale ma essi, come ogni altro massimo locale e minimo locale, non sono conseguiti in $(0, 1)^2$. Si tratta quindi di studiare f limitatamente alla frontiera, cioè all'insieme

$$\partial([0, 1]^2) = ([0, 1] \times \{0\}) \cap ([0, 1] \times \{1\}) \cap (\{0\} \times [0, 1]) \cap (\{1\} \times [0, 1]).$$

Osserviamo che si ha:

- $f|_{[0,1]\times\{0\}} \equiv 1$ e $f|_{\{0\}\times[0,1]} \equiv 1$;
- $\frac{\partial f}{\partial y}(1, t) = \frac{\cos t[t - \tan t]}{t^2}$ e quindi $t \mapsto f(1, t)$ è strettamente decrescente in $[0, 1]$;
- $\frac{\partial f}{\partial x}(t, 1) = \frac{\cos t[t - \tan t]}{t^2}$ e quindi $t \mapsto f(t, 1)$ è strettamente decrescente in $[0, 1]$.

Siamo così in grado di concludere che:

- Il massimo globale è 1 e viene conseguito in tutti i punti di $([0, 1] \times \{0\}) \cap (\{0\} \times [0, 1])$;
- $(1, 1)$ è l'unico punto di minimo globale e si ha $f(1, 1) = \sin 1$;
- Non ci sono punti di massimo locale e di minimo locale diversi da quelli globali.

Esercizio 3

Il dominio di F è $\mathbb{R}^3$ e quindi è stellato. Inoltre si vede subito che F doddisfa la CDI e quindi ha un potenziale (Proposizione 1.5, diario), quindi è conservativo (Proposizione 1.1, diario). Indicato con φ un potenziale, si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{2yz}{1+y^2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \ln(1+y^2). \tag{2}$$

Dalla prima uguaglianza segue che $\varphi(x,y,z) - x$ non dipende da x e quindi è una funzione di classe C^1 delle sole variabili y, z che indicheremo con $f(y,z)$, cioè

$$\varphi(x,y,z) = x + f(y,z).$$

Sostituendo nella seconda uguaglianza di (2), si trova

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2yz}{1+y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(z\ln(1+y^2)\right).$$

Quindi $f(y,z) - z\ln(1+y^2)$ non dipende da y, cioè esiste una funzione g della sola variabile z e di classe C^1 tale che

$$\varphi(x,y,z) = x + z\ln(1+y^2) + g(z).$$

Sostituendo nella terza uguaglianza di (2), ricaviamo

$$\ln(1+y^2) + g'(z) = \ln(1+y^2)$$

da cui $g'(z) = 0$, per cui $g \equiv c \in \mathbb{R}$. Se ne conclude che, per esempio, la funzione

$$x + z\ln(1+y^2)$$

è un potenziale di F.