Analisi Matematica 2

* * *

Prova scritta del 6 settembre 2016

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1

la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-1}\, y^n. \tag{1}$$

ha raggio di convergenza

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2-1} \times \frac{(n+1)^2-1}{n+1} = 1$$

e quindi essa converge per $y \in (-1, 1)$. Essa converge anche in $y = -1$, per il criterio di Leibniz (la monotonia decrescente dei coefficienti si ottiene da semplici disuguaglianze, oppure osservando che $(\frac{t}{t^2-1})' < 0$ se $t > 1$). Infine la serie (1) diverge in $y = 1$, in quanto $\frac{n}{n^2-1} > \frac{1}{n}$.

Ne segue che la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-1}(\sin x)^n.$$

converge per ogni x che non appartiene all'insieme

$$\{\pi/2 + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\},$$

mentre in tali punti la serie diverge.

Esercizio 2

Si riacava facilmente che il gradiente

$$\nabla f(x,y) = (6xy - 5y^2\,,\, 3x^2 - 10xy)$$

si annulla solo in $(0,0)$. Quindi i punti cercati non possono essere interni al triangolo (che indicheremo con T) ma devono appartenere alla sua frontiera. Tale frontiera è l'unione dei tre segmenti

$$A := \{(0,y)\,|\,y \in [0,1]\}, \quad B := \{(x,0)\,|\,x \in [0,1]\}, \quad L := \{(x,1-x)\,|\,x \in [0,1]\}$$

e osserviamo che si ha

$$f|_{A\cup B} \equiv 0.$$

Consideriamo ora la funzione

$$g(x) := f(x,1-x), \quad x \in [0,1].$$

Poiché $g(x) = -8x^3 + 13x^2 - 5x$, si ha

$$g'(x) = -24x^2 + 26x - 5.$$

Quindi la derivata g' si annulla in $1/4$ e in $5/6$, è negativa in $\mathbf{R} \setminus [1/4, 5/6]$ ed è positiva in $(1/4, 5/6)$. Dunque g consegue il suo minimo assoluto in $1/4$ (con valore negativo, in quanto $g(0) = 0$) e il suo massimo assoluto in $5/6$ (con valore positivo, in quanto $g(1) = 0$). Se ne conclude che il punto di minimo assoluto di $f|_T$ e il punto di massimo assoluto di $f|_T$ sono rispettivamente $(1/4, 3/4)$ e $(5/6, 1/6)$.

Esercizio 3

Se moltiplichiamo l'equazione per il fattore integrante $e^{\sin x}$, otteniamo

$$e^{\sin x} y'(x) + e^{\sin x} \cos x \, y(x) = e^{\sin x} \cos x$$

i.e.

$$D\Big(e^{\sin x} y(x)\Big) = D\Big(e^{\sin x}\Big)$$

da cui segue

$$e^{\sin x} y(x) = e^{\sin x} + C$$

dove C è una costante arbitraria. Otteniamo quindi la seguente espressione per la soluzione generale

$$y(x) = 1 + Ce^{-\sin x}.$$

Imponendo la condizione prescritta $y(\pi/2) = 2$ e cioè

$$1 + Ce^{-1} = 2$$

si ottiene subito $C = e$. La soluzione cercata è dunque

$$y(x) = 1 + e^{1-\sin x}.$$