Analisi Matematica 2

* * *

Prova scritta del 12 gennaio 2017

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1

Si ha

$$\left|\frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{1}{n^{|x|}}\right]\right| \leq \frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{n}+\frac{1}{n^{|x|}}\right)=\frac{|x|}{n^2}+\frac{1}{n^{1+|x|}}.$$

Di conseguenza la serie converge assolutamente (e quindi anche semplicemente) per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Se $0 < a < b < +\infty$, la medesima disuguaglianza implica

$$\left|\frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{1}{n^{|x|}}\right]\right| \leq \frac{b}{n^2}+\frac{1}{n^{1+a}}$$

per ogni $x \in [a, b]$, i.e.

$$\left\|\frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{1}{n^{|x|}}\right]\right\|_{L^\infty([a,b])} \leq \frac{b}{n^2}+\frac{1}{n^{1+a}}.$$

Perciò la serie converge totalmente in $L^\infty([a, b])$.

Esercizio 2

Se $F := (F_1, F_2)$ con

$$F_1(x, y, z) := x + y + 1, \quad F_2(x, y, z) := y + z + 1$$

allora si ha

$$F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2), \quad R = F^{-1}(0).$$

Dato che

$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ogni punto di R è regolare. Quindi se (x, y, z) minimizza $\varphi|_R$, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange devono esistere due numeri reali λ_1 e λ_2 tali che

$$\nabla\varphi(x, y, z) = \lambda_1 \nabla F_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla F_2(x, y, z)$$

cioè

$$(x, y, z) = \lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(0, 1, 1) = (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2).$$

Vale quindi il sistema di identità

$$\begin{cases} x = \lambda_1 \\ y = \lambda_1 + \lambda_2 \\ z = \lambda_2 \\ x + y + 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava facilmente

$$(x, y, z) = (-1/3, -2/3, -1/3).$$

Esercizio 3

Osserviamo che Q_1 e Q_2 sono le componenti connesse del dominio Q di F. Inoltre Q_1 stellato e, come si verifica subito, $F|_{Q_1}$ soddisfa la condizione delle derivate incrociate, i.e.

$$D_2F_1(x,y) = D_1F_2(x,y), \text{ per ogni } (x,y) \in Q_1.$$

Allora $F|_{Q_1}$ ha potenziale e quindi è conservativo.

Infine, non può esistere un potenziale φ di F. Altrimenti $\varphi|_{Q_2}$ sarebbe un potenziale di $F|_{Q_2}$ e quindi quest'ultimo dovrebbe soddisfare la condizione delle derivate incrociate, che banalmente non vale.