Analisi Matematica 2

* * *

Prova scritta del 8 febbraio 2017

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1

- Da
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$
segue subito che per ogni $x > 0$ si ha
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} e\,\frac{nx}{e^{nx}} = 0.$$
Ovviamente si ha anche $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

- Per il primo punto, se $\{f_n\}$ convergesse uniformemente, la funzione limite dovrebbe essere 0. D'altra parte, per ogni n si ha
$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,+\infty)} f_n(x) \geq f_n(1/n) = 1$$
e quindi $\{f_n\}$ non può convergere uniformemente.

- Per $x > 0$ si ha
$$f_n'(x) = ne^{1-nx} - n^2xe^{1-nx} = \left(\frac{1}{n} - x\right) n^2e^{1-nx}.$$
Pertanto la funzione f_n cresce sull'intervallo $[0, 1/n]$, raggiunge il suo valore massimo per $x = 1/n$ e in seguito decresce convergendo a zero per $x \to +\infty$. Se $a > 0$ si ha allora
$$\sup_{x\in[a,+\infty)} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[a,+\infty)} f_n(x) = f_n(a)$$
per ogni n sufficientemente grande (basta che sia $1/n \leq a$). Ricordando il primo punto, concludiamo che
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in[a,+\infty)} |f_n(x) - 0|\right) = \lim_{n\to+\infty} f_n(a) = 0.$$

Esercizio 2

Poniamo
$$f(x,y) := \frac{y}{x+2}, \quad (x,y) \in D$$
e osserviamo prima di tutto che il punto di minimo assoluto e il punto di minimo assoluto devono esistere per il teorema di Weierstrass. Essi vanno cercati fra i punti interni a D che annullano ∇f e gli estremali di $f|_{\partial D}$. Poiché

$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{y}{(x+2)^2}\,,\,\frac{1}{x+2}\right) \neq (0,0)$$

per ogni $(x,y) \in \mathrm{int}D$, non rimane che studiare $f|_{\partial D}$. Consideriamo per questo la funzione
$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \frac{\sin t}{\cos t + 2}, \quad t \in [0, 2\pi].$$
Si ha
$$g'(t) = \frac{\cos t(\cos t + 2) + \sin^2 t}{(\cos t + 2)^2} = \frac{1 + 2\cos t}{(\cos t + 2)^2}$$
per ogni $t \in (0, 2\pi)$, da cui vediamo che g' si annulla in $2\pi/3$ e $4\pi/3$. Dato che

$$g(2\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad g(4\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

e $g(0) = g(2\pi) = 0$, possiamo concludere che:

- Il massimo assoluto di f è $\sqrt{3}/3$, che viene conseguito in $(\cos 2\pi/3, \sin 2\pi/3) = (-1/2, \sqrt{3}/2)$;
- Il minimo assoluto di f è $-\sqrt{3}/3$, che viene conseguito in $(\cos 4\pi/3, \sin 4\pi/3) = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$.

Esercizio 3

In questo caso il fattore integrando è la funzione x. Moltiplicando allora l'equazione differenziale per x, otteniamo

$$xy'(x) + y(x) = \cos x$$

cioè

$$D[xy(x)] = \cos x$$

da cui

$$xy(x) = \sin x + C$$

con C costante arbitraria. La soluzione generale è pertanto

$$y(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}, \quad x > 0.$$

Ricordando che

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

troviamo subito che deve essere $C = 0$. La soluzione cercata è quindi

$$y(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x > 0.$$