Analisi Matematica 3

* * *

Prova scritta del 5 luglio 2016

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

In coordinate polari, la regione A risulta rappresentata dall'insieme

$$B := \{(\rho, \theta) \,|\, \theta \in [0, \pi/4],\ \rho \in [1, 1/\cos\theta]\}$$

cioè $A = \varphi(B)$ con

$$\varphi : B \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(\rho, \theta) := (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

La mappa φ è una $(2, 2)$-parametrizzazione regolare e si ha

$$J\varphi(\rho, \theta) = \rho.$$

Quindi, dalla formula dell'area e dal teorema di Fubini, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{A=\varphi(B)} x\, dxdy &= \int_B \rho^2 \cos\theta\, d\rho d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \left(\int_1^{1/\cos\theta} \rho^2 \cos\theta\, d\rho \right) d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} \cos\theta \left(\frac{1}{\cos^3\theta} - 1 \right) d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - \cos\theta \right) d\theta \\
&= \frac{1}{3} (\tan\theta - \sin\theta)_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \\
&= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Una parametrizzazione di $[A; B]$ è data da

$$\gamma(t) := (t, 1-t, t^2 + (1-t)^2) = (t, 1-t, 2t^2 - 2t + 1), \qquad t \in [0,1].$$

Si ha

$$\gamma'(t) = (1, -1, 4t-2), \qquad t \in (0,1)$$

e quindi, scegliendo come τ quello associato a γ, si ha

$$\int_{(\Gamma,\tau)} (2z, x, y) = \int_0^1 (4t^2 - 4t + 2, t, 1-t) \cdot (1, -1, 4t-2)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 3

Indichiamo con $(\cdot,\cdot)$ il prodotto scalare in $L^2(-\pi,\pi)$. Allora

$$\begin{aligned}(ax^2+bx+c,\sin x) &= a\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin x\,dx + b\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx + c\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,d \\ &= b\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx\end{aligned}$$

dove

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx = (-x\cos x)_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx = 2\pi.$$

Quindi

$$(ax^2+bx+c,\sin x) = 2b\pi.$$

In particolare:

- Se $b\neq 0$ allora $(bx+c,\sin x) = 2b\pi \neq 0$;
- Sia $a\neq 0$. Allora $(ax^2+bx+c,\sin x)=0$ se e solo se $b=0$.

Per risolvere l'ultimo punto, osserviamo che:

- Per ogni k si ha

$$(cos^k x,\sin x) = -\int_{-\pi}^{\pi}\cos^k x D(cosx)\,dx = 0.$$

Inoltre:

- Se k è pari, $k=2h$, allora $\sin^k x\sin x = \sin^{2h+1} x$ è dispari e quindi

$$(\sin^k x,\sin x) = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2h+1} x\,dx = 0;$$

- Se k è dispari, $k=2h+1$, allora $\sin^k x\sin x = (\sin^{h+1} x)^2$ e quindi

$$(\sin^k x,\sin x) = \int_{-\pi}^{\pi}(\sin^{h+1} x)^2\,dx > 0.$$

Se ne conclude che gli elementi della famiglia assegnata sono tutti ortogonali a $\sin x$, eccetto le funzioni $\sin^k x$ con k dispari.