Analisi Matematica 3

* * *

Prova scritta del 6 giugno 2016

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Consideriamo il settore di disco unitario

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ -x \leq y \leq x\}.$$

Allora $E \cap (S \times \mathbb{R})$ coincide col sottografico della funzione

$$(x, y) \mapsto 1 - x, \quad (x, y) \in S$$

e quindi

$$\mathcal{L}^3(E) = 4 \int_S (1 - x) dxdy.$$

Possiamo ora introdurre il cambio di variabili (polari)

$$\varphi : [0, 1] \times [-\pi/4, \pi/4] \to S, \quad (\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$$

e ricordare che $J\varphi(\rho, \theta) = \rho$. Dalla formula dell'area e dal Teorema di Fubini, otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^3(E) &= 4 \int_{[0,1]\times[-\pi/4,\pi/4]} (1 - \rho\cos\theta)\rho \, d\rho\theta \\
&= 4 \int_{[0,1]} \left(\int_{[-\pi/4,\pi/4]} (1 - \rho\cos\theta)\rho \, d\theta \right) d\rho \\
&= 4 \int_{[0,1]} \rho \, [\theta - \rho \sin\theta]_{-\pi/4}^{\pi/4} d\rho \\
&= 4 \int_{[0,1]} \rho \left(\frac{\pi}{2} - \rho\sqrt{2} \right) d\rho \\
&= \pi - \frac{4\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Si ha
$$\operatorname{rot}\mathrm{F} \equiv (-1,-1,-1)$$
da cui
$$\int_{(S,\nu)} \operatorname{rot}\mathrm{F} = \int_{\mathrm{S}} (\operatorname{rot}\mathrm{F})\cdot\nu \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 = \int_{\mathrm{S}} -1 \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 = -\mathcal{H}^2(\mathrm{S}) = -3\pi.$$
D'altro canto
$$\int_{\partial(S,\nu)} F = \int_{\lambda} F + \int_{\gamma} F$$
dove
$$\lambda(t) := (2\cos t, 2\sin t, 1), \quad t\in[0,2\pi]$$
e
$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t, 1), \quad t\in[2\pi,0].$$
Quindi
$$\begin{aligned}
\int_{\partial(S,\nu)} F &= \int_0^{2\pi} F(\lambda(t))\cdot\lambda'(t)\,dt + \int_{2\pi}^{0} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (2\cos t + 2\sin t, 2\sin t + 1, 1 + 2\cos t)\cdot(-2\sin t, 2\cos t, 0)\,dt + \\
&+ \int_{2\pi}^{0} (\cos t + \sin t, \sin t + 1, 1 + \cos t)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-4\cos t\sin t - 4\sin^2 t + 4\cos t\sin t + 2\cos t)\,dt + \\
&- \int_0^{2\pi} (-\cos t\sin t - \sin^2 t + \cos t\sin t + \cos t)\,dt \\
&= -3\pi.
\end{aligned}$$
Perciò vale, effettivamente
$$\int_{(S,\nu)} \operatorname{rot}\mathrm{F} = \int_{\partial(\mathrm{S},\nu)} \mathrm{F}.$$

Esercizio 3

Si ha ($n \geq 0$)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin t\cos(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos t\cos(nt)\,dt.$$

Per $n = 0$ troviamo subito

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin t\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos t\,dt = -\frac{2}{\pi}.$$

Per $n = 1$ si ha

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin t\cos t\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos^2 t\,dt = 0 + \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

Per $n \geq 2$ useremo le seguenti ben note formule trigonometriche:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

e

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}.$$

Infatti da esse segue subito che ($n \geq 2$)

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin t\cos(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos t\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin(1+n)t + \sin(1-n)t\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(1+n)t + \cos(1-n)t\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos(1+n)t}{1+n} + \frac{\cos(1-n)t}{1-n}\right)_0^{-\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{1+n}}{1+n} + \frac{(-1)^{1-n}}{1-n} - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n}\right) \\
&= \frac{1}{(1-n^2)\pi}\left((-1)^{1+n} - 1\right)
\end{aligned}$$

e cioè ($n \geq 2$)

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{(n^2-1)\pi} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Infine la serie di Fourier di f ha le seguenti proprietà di convergenza:

- Essa converge a f in $L^2(-\pi,\pi)$;
- In $x \in (-\pi,0)\cup(0,\pi)$ essa converge a $f(x)$, in $-\pi$ essa converge a $-1/2$, in 0 essa converge a $1/2$.