Analisi Matematica 3

* * *

Prova scritta del 6 settembre 2016

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Per il teorema di Fubini, si ha

$$I := \int_C z\,dxdydz = \int_0^1 \left(\int_{C_z} z\,dxdy \right) dz = \int_0^1 z\,\mathcal{L}^2(C_z)dz.$$

Osserviamo che C_z è l'ellisse di semiassi $2(1-z)$ e $1-z$, per cui si ha

$$\mathcal{L}^2(C_z) = 2(1-z)^2\pi.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_0^1 z(1-z)^2 dz \\ &= 2\pi \int_0^1 (z^3 - 2z^2 + z)\,dz \\ &= 2\pi \left(\frac{z^4}{4} - \frac{2z^3}{3} + \frac{z^2}{2} \right)_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Esercizio 2

Consideriamo la parametrizzazione "polare" della calotta

$$\varphi(\rho,\theta) := (\rho\cos\theta\,,\ \rho\sin\theta\,,\ 1-\rho^2), \quad (\rho,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi].$$

Il fattore di trasformazione di φ è

$$\begin{aligned}
J\varphi(\rho,\theta) &= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\times\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right| \\
&= \left|\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & -2\rho \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{pmatrix}\right| \\
&= |(2\rho^2\cos\theta\,,\ 2\rho^2\sin\theta\,,\ \rho)| \\
&= \rho\sqrt{4\rho^2+1}.
\end{aligned}$$

Osserviamo che il piano $z = q$ divide la calotta in due superfici C_1 e C_2 parametrizzate rispettivamente da

$$\varphi|_{R_1},\ \text{con } R_1 := [0,\sqrt{1-q}]\times[0,2\pi]$$

e

$$\varphi|_{R_2},\ \text{con } R_2 := [\sqrt{1-q},1]\times[0,2\pi].$$

Quindi, per la formula dell'area e per il teorema di Fubini:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^2(C_1) &= \int_{\varphi(R_1)} 1\,d\mathcal{H}^2 \\
&= \int_{R_1} \rho\sqrt{4\rho^2+1}\,d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{1-q}} \rho\sqrt{4\rho^2+1}\,d\rho\right)d\theta \\
&= \frac{\pi}{6}\big[(4\rho^2+1)^{3/2}\big]_0^{\sqrt{1-q}} \\
&= \frac{\pi}{6}\big[(5-4q)^{3/2}-1\big].
\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^2(C_2) &= \int_{\varphi(R_2)} 1\,d\mathcal{H}^2 \\
&= \int_{R_2} \rho\sqrt{4\rho^2+1}\,d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_{\sqrt{1-q}}^{1} \rho\sqrt{4\rho^2+1}\,d\rho\right)d\theta \\
&= \frac{\pi}{6}\big[(4\rho^2+1)^{3/2}\big]_{\sqrt{1-q}}^{1} \\
&= \frac{\pi}{6}\big[5^{3/2}-(5-4q)^{3/2}\big].
\end{aligned}$$

Il valore di q richiesto si ottiene uguagliando tali due espressioni

$$\frac{\pi}{6}\big[(5-4q)^{3/2}-1\big] = \frac{\pi}{6}\big[5^{3/2}-(5-4q)^{3/2}\big].$$

Si ottiene

$$2(5-4q)^{3/2} = 1+5^{3/2}$$

da cui

$$5-4q = c := \left(\frac{1+5^{3/2}}{2}\right)^{2/3}$$

e quindi

$$q = \frac{5-c}{4}.$$

Esercizio 3 Poiché

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$$

la funzione f è continua a tratti. Anzi, essa regolare a tratti! Infatti:

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

per ogni $x \in (0, \pi)$ e quindi:

- La derivata f' è continua in $[-\pi, \pi) \setminus \{-\pi, 0\}$;
- Per il teorema di l'Hospital vale

  $$\lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0+} \frac{-x \sin x}{2x} = 0$$

  e quindi f' è limitata in un intorno di 0;
- Per ogni $\varepsilon > 0$, la funzione f' è ovviamente limitata in $(-\pi, \pi) \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Allora il teorema di convergenza puntuale per le serie di Fourier prova che la serie di Fourier di f converge in ogni in ogni punto di $\mathbb{R}$ e se $S(x)$ indica la somma in x si ha

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \text{ non è un multiplo di } \pi; \\ 3/2 & \text{se } x \text{ è un multiplo pari di } \pi; \\ 1 & \text{se } x \text{ è un multiplo dispari di } \pi. \end{cases}$$

Inoltre:

- Poiché $f|_{(-\pi,\pi)} \in L^2(-\pi, \pi)$, la serie di Fourier di f converge incondizionatamente a f in $(L^2(-\pi, \pi), \| \cdot \|_2)$;
- Poiché f non è continua in $\mathbb{R}$, la serie di Fourier di f non converge in $L^\infty(\mathbb{R})$.