Analisi Matematica 3

* * *

Prova scritta del 8 febbraio 2017

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Introduciamo due nuove variabili u e v tali che

$$\begin{cases} y = ux \\ y = v(1-x) \end{cases}$$

con

$$(u,v) \in Q := [1,2] \times [1,2]$$

Risolvendo tale sistema rispetto a (u,v) otteniamo

$$x = \frac{v}{u+v}, \qquad y = \frac{uv}{u+v}.$$

Poniamo quindi

$$\varphi(u,v) := \left(\frac{v}{u+v}\,, \frac{uv}{u+v} \right), \qquad (u,v) \in Q$$

e osserviamo che φ è una $(2,2)$-parametrizzazione regolare. Un semplice calcolo mostra che

$$J\varphi(u,v) = \frac{uv}{(u+v)^3}$$

e quindi, applicando la formula dell'area (cambiamento di variabile) e il teorema di Fubini, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{A=\varphi(Q)} \frac{1}{xy^2}\,dxdy &= \int_Q \frac{(u+v)^3}{u^2v^3} \times \frac{uv}{(u+v)^3}\,dudv \\ &= \int_1^2 \frac{1}{u}\,du \int_1^2 \frac{1}{v^2}\,dv \\ &= \ln 2 \left(-\frac{1}{v} \right)_{v=1}^{v=2} \\ &= \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 2

Una parametrizzazione di $\overline{S}$ è

$$[0,1] \ni t \mapsto \gamma(t) := (1,1,2) + t[(3,3,0) - (1,1,2)] = (1+2t, 1+2t, 2-2t).$$

Quindi, dalla formula dell'area, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{S}} \left(\frac{y}{x}, \ln\frac{x}{y}, x - y + z \right) &= \int_0^1 (1, 0, 2-2t) \cdot (2, 2, -2)\, dt \\
&= \int_0^1 (2 - 4 + 4t)\, dt \\
&= \int_0^1 (4t - 2)\, dt \\
&= (2t^2 - 2t)_{t=0}^{t=1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Prima di tutto osserviamo che la funzione $|\sin|$ è pari. Allora tutti i coefficienti b_n sono nulli. Inoltre, ricordando l'identità

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$

otteniamo (per $n \geq 0$)

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(1+n)t + \sin(1-n)t\,dt.$$

In particolare

$$a_1 = 0$$

mentre, per $n \neq 1$, si ha

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos(1+n)t}{1+n} + \frac{-\cos(1-n)t}{1-n}\right)_{t=0}^{t=\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{1+n} + \frac{(-1)^n}{1-n} + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n}\right) \\ &= \frac{2[(-1)^n+1]}{\pi(1-n^2)}. \end{aligned}$$

Quindi

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

e pertanto la serie di Fourier di $|\sin|$ è

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)}\cos(2kx).$$

Dato che la funzione $|\sin|$ è continua, tale serie converge totalmente in $L^\infty(\mathbb{R})$. Di conseguenza essa converge anche uniformemente in $\mathbb{R}$, puntualmente in $\mathbb{R}$ e in $L^2(-\pi,\pi)$.