Analisi Matematica 3

* * *

Prova scritta del 11 gennaio 2016

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Si ha

$$\gamma'(t) = (-2\sin t, \cos t, 3), \quad t \in (0, 2\pi)$$

da cui

$$|\gamma'(t)| = (4\sin^2 t + \cos^2 t + 9)^{1/2} = (3\sin^2 t + 10)^{1/2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{(5 - x^2 - 4y^2)z}{(3y^2+10)^{1/2}}\, d\mathcal{H}^1(x,y,z) &= \int_0^{2\pi} \frac{(5 - 4\cos^2 t - 4\sin^2 t)\, 3t}{(3\sin^2 t + 10)^{1/2}} (3\sin^2 t + 10)^{1/2}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 3t\, dt \\
&= 6\pi^2.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Introduciamo due nuove variabili s e t tali che

$$\begin{cases} y = s - x^2 \\ y = t + x \end{cases}$$

dove

$$(s,t) \in R := [2,3] \times [0,1] \quad \text{e} \quad (x,y) \in E$$

Invertendo il sistema otteniamo facilmente

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{1+4(s-t)}-1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{1+4(s-t)}-1}{2} + t \end{cases}$$

Allora definiamo la $(2,2)$-parametrizzazione regolare $\varphi : R \to \mathbb{R}^2$ come segue

$$\varphi(s,t) := \left(\frac{\sqrt{1+4(s-t)}-1}{2} \, , \, \frac{\sqrt{1+4(s-t)}-1}{2} + t \right)$$

e osserviamo che

$$D\varphi(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+4(s-t)}} & -\frac{1}{\sqrt{1+4(s-t)}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+4(s-t)}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{1+4(s-t)}} \end{pmatrix}$$

da cui

$$J\varphi(s,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4(s-t)}}.$$

Per la formula dell'area (posto $f(x,y) := 2(y-x)(2x+1)$):

$$\begin{aligned} \int_{E=\varphi(R)} f \, d\mathcal{L}^2 &= \int_R (f \circ \varphi) J\varphi, d\mathcal{L}^2 \\ &= \int_R 2t\sqrt{1+4(s-t)} \times \frac{1}{\sqrt{1+4(s-t)}} dsdt \\ &= \int_R 2t \, dsdt. \end{aligned}$$

La conclusione segue dal teorema di Fubini (sezioni verticali):

$$\int_E f \, d\mathcal{L}^2 = \int_2^3 \left(\int_0^1 2t \, dt \right) ds = 1.$$

Esercizio 3

Per ogni $n \geq 1$, usando la formula di integrazione per parti, si trova

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} tD\left(\frac{-\cos(nt)}{n}\right)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{t\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\frac{\cos(nt)}{n}\,dt\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\cos(n\pi/2) + \frac{1}{n^2}\sin(n\pi/2)\right) \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\sin(n\pi/2) - \frac{1}{n}\cos(n\pi/2) \\
&= \begin{cases} \frac{2}{4k^2\pi}\sin(k\pi) - \frac{1}{2k}\cos(k\pi) & \text{se } n = 2k \\ \frac{2}{(2k+1)^2\pi}\sin(k\pi+\pi/2) - \frac{1}{2k+1}\cos(k\pi+\pi/2) & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

cioè

$$b_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} & \text{se } n = 2k \\ \frac{2(-1)^k}{(2k+1)^2\pi} & \text{se } n = 2k+1. \end{cases}$$

Proprietà di convergenza:

- Poiché la periodicizzata f dell'estensione dispari a $[-\pi,\pi]$ della funzione assegnata è di classe $L^2(-\pi,\pi)$, la serie di Fourier determinata converge a f in $L^2(-\pi,\pi)$;
- Per il teorema di convergenza puntuale, la serie di Fourier converge in ogni $x \in [-\pi,\pi]$. Indicando con $S(x)$ la somma, si ha

$$S(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (-\pi/2,\pi/2) \\ 0 & \text{se } x \in [-\pi,-\pi/2) \cup (\pi/2,\pi] \\ -\pi/4 & \text{se } x = -\pi/2 \\ \pi/4 & \text{se } x = \pi/2. \end{cases}$$