**Analisi Matematica 3**

* * *

**Prova scritta del 12 gennaio 2017**

**Risoluzione degli esercizi**

**Esercizio 1**

Osserviamo prima di tutto che

$$I := \int_{\partial S} xyz \, d\mathcal{H}^1 = \int_C xyz \, d\mathcal{H}^1$$

dove $C$ è la curva parametrizzata da

$$\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) := (\cos t, \sin t, \cos^2 t - \sin^2 t).$$

Poiché $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$, si vede subito che $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, -2\sin(2t))$ e quindi

$$|\gamma'(t)| = [1 + 4\sin^2(2t)]^{1/2}.$$

Dalla formula dell'area segue allora

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\gamma([0,\pi/2])} xyz \, d\mathcal{H}^1 \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \cos(2t) [1 + 4\sin^2(2t)]^{1/2} \, dt \\
&= \frac{1}{32} \int_0^{\pi/2} [1 + 4\sin^2(2t)]^{1/2} D[1 + 4\sin^2(2t)] \, dt \\
&= \frac{1}{32} \times \frac{2}{3} \Big( [1 + 4\sin^2(2t)]^{3/2} \Big)_{t=0}^{t=\pi/2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

**Esercizio 2** Dal teorema di Green segue che

$$
\begin{aligned}
I &:= \int_{(\partial E,\tau)} (x\ln(1+y), x+y) \\
&= \int_E \big[D_1(x+y) - D_2(x\ln(1+y))\big]\, dxdy \\
&= \int_E \left(1 - \frac{x}{1+y}\right) dxdy.
\end{aligned}
$$

Usando il teorema di Fubini (sezioni orizzontali), si ottiene

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_y^{1+y} \left(1 - \frac{x}{1+y}\right) dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2(1+y)}\right)_{x=y}^{x=1+y} dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2(1+y)} dydy \\
&= \left(\frac{\ln(1+y)}{2}\right)_{y=0}^{y=1} \\
&= \frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}
$$

**Esercizio 3**

Poiché $f$ è una funzione dispari, si ha $a_n = 0$ per ogni $n \geq 0$. Per $n \geq 1$, usando la formula di integrazione per parti, si trova

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} t\sin(nt)\,dt - 2\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(nt)\,dt. \end{aligned} \tag{1}$$

Calcoliamo il primo integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} t\sin(nt)\,dt &= \int_0^{\pi/2} tD\left(\frac{-\cos(nt)}{n}\right)dt \\ &= \left[-\frac{t\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(nt)}{n}\,dt \\ &= -\frac{\pi}{2n}\cos(n\pi/2) + \frac{1}{n^2}\sin(n\pi/2) \end{aligned}$$

cioè

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\sin(nt)\,dt = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2k} & \text{se } n = 2k \\ \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2\pi} & \text{se } n = 2k+1. \end{cases} \tag{2}$$

Calcoliamo il secondo integrale:

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(nt)\,dt &= \left(\frac{\cos(nt)}{n}\right)_{t=\pi}^{t=\pi/2} \\ &= \frac{1}{n}\left(\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi)\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2k}((-1)^k - 1) & \text{se } n = 2k \\ \frac{1}{2k+1} & \text{se } n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

cioè

$$-2\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(nt)\,dt = \begin{cases} \frac{1}{k}(1 - (-1)^k) & \text{se } n = 2k \\ -\frac{2}{2k+1} & \text{se } n = 2k+1. \end{cases} \tag{3}$$

Da (1), (2) e (3) si ottiene

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2k}(2 - (-1)^k) & \text{se } n = 2k \\ \frac{2}{2k+1}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)\pi} - 1\right) & \text{se } n = 2k+1. \end{cases}$$

Proprietà di convergenza:

- Poiché $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^2(-\pi,\pi)$, la serie di Fourier determinata converge a $f|_{[-\pi,\pi]}$ in $L^2(-\pi,\pi)$;

- Per il teorema di convergenza puntuale, la serie di Fourier converge in ogni punto di $\mathbb{R}$. Ovviamente la somma $S$ è una funzione $2\pi$ periodica (dispari) e si ha
$$S(x) = \begin{cases} \pi & \text{se } x \in (-\pi, -\pi/2) \\ -x & \text{se } x \in (-\pi/2, \pi/2) \\ -\pi & \text{se } x \in (\pi/2, \pi) \\ 0 & \text{se } x = -\pi \\ 3\pi/4 & \text{se } x = -\pi/2 \\ -3\pi/4 & \text{se } x = \pi/2. \end{cases}$$
- Poiché $S$ è discontinua, la serie di Fourier non converge in $L^\infty(\mathbf{R})$.