Analisi Matematica 3

* * *

Prova scritta del 25 gennaio 2016

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Poniamo $D := A \backslash B$,

$$I := \int_{A\backslash B} x + \sin(xy)\, d\mathcal{L}^2(x,y) = \int_D x\, d\mathcal{L}^2(x,y) + \int_D \sin(xy)\, d\mathcal{L}^2(x,y)$$

e osserviamo che, per il teorema di Fubini, il secondo integrale in quest'ultima somma è nullo in quanto (per ogni x) D_x è simmetrico rispetto all'origine e $y \mapsto \sin(xy)$ è una funzione dispari. Passando alle coordinate polari, i.e. osservando che $D = \varphi(C)$ con

$$C := \{(\theta,\rho) \mid -\pi/2 \le \theta \le \pi/2,\ \cos\theta \le \rho \le 2\cos\theta\}$$

e

$$\varphi : C \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\theta,\rho) := (\rho\cos\theta\,,\ \rho\sin\theta)$$

si ottiene allora (dalla formula dell'area e dal teorema di Fubini)

$$\begin{aligned} I &= \int_{\varphi(C)} x\, d\mathcal{L}^2(x,y) = \int_C \rho^2 \cos\theta\, d\mathcal{L}^2(\theta,\rho) \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} \rho^2 \cos\theta\, d\rho \right) d\theta \\ &= \frac{7}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

Usando (per esempio) la ben nota identità $\cos^2\alpha = (1+\cos 2\alpha)/2$, si trova facilmente che

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{8}$$

e quindi

$$I = \frac{7\pi}{8}.$$

Esercizio 2

Posto $F(x,y,z) := (yz, yz, yz)$, si trova subito

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = (z-y, y, -z).$$

Inoltre si ha

$$\nu(x,y,z) = (x,0,z), \quad (x,y,z) \in S$$

e quindi

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) \cdot \nu(x,y,z) = x(z-y) - z^2.$$

La superficie S può essere parametrizzata come segue

$$\varphi : R := [0,1] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(s,\theta) := (\cos\theta, s, \sin\theta)$$

e si verifica subito che

$$J\varphi(s,\theta) = |D_1\varphi(s,\theta) \times D_2\varphi(s,\theta)| = |(\cos\theta, 0, \sin\theta)| = 1$$

per ogni $\theta \in (0,1)$. Applicando la formula dell'area e il teorema di Fubini, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{(S,\nu)} \operatorname{rot} F &= \int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^2 = \int_{S=\varphi(R)} x(z-y) - z^2 \, d\mathcal{H}^2(x,y,z) \\
&= \int_R \cos\theta(\sin\theta - s) - \sin^2\theta \, d\mathcal{L}^2(s,\theta) \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \sin\theta\cos\theta \, d\theta \right) ds - \int_0^1 s \left(\int_0^\pi \cos\theta \, d\theta \right) ds + \\
&- \int_0^1 \left(\int_0^\pi \sin^2\theta \, d\theta \right) ds
\end{aligned}$$

i.e.

$$\int_{(S,\nu)} \operatorname{rot} F = -\frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Osserviamo che ∂S è l'unione di quattro tratti regolari (due semicirconferenze e due segmenti) e che il campo F è diverso da zero solo lungo la semicirconferenza parametrizzata da

$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) := (\cos t, 1, \sin t).$$

Osserviamo anche che, indicato con τ il campo unitario che orienta ∂S compatibilmente con l'orientazione assegnata su S, si ha

$$\tau(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}, \quad t \in (0,\pi)$$

per cui

$$\begin{aligned}\int_{(\partial S,\tau)} F = \int_{\partial S} F\cdot\tau\, d\mathcal{H}^1 &= \int_0^\pi F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_0^\pi \sin t\,(1,1,1)\cdot(-\sin t, 0, \cos t)\,dt \\ &= -\int_0^\pi \sin^2 t\,dt + \int_0^\pi \sin t\cos t\,dt\end{aligned}$$

i.e.

$$\int_{(\partial S,\tau)} F = -\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Da (1) e (2) segue che

$$\int_{(S,\nu)} \operatorname{rot} F = \int_{(\partial S,\tau)} F.$$

Esercizio 3

Per $t \in [0, \pi]$ si ha $g(t)^2 = t^{-1/2}$ e quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)^2 dt = 2 \int_0^{\pi} t^{-1/2} dt = 4\pi^{1/2}$$

da cui segue che $g \in L^2(-\pi, \pi)$. Per ogni intero $n \geq 1$ si ha inoltre

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^{3/4} \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^{3/4} D\left(\frac{\sin nt}{n}\right) dt \\
&= \frac{2}{n\pi} \left(\left[t^{3/4} \sin nt \right]_0^{\pi} - \frac{3}{4} \int_0^{\pi} t^{-1/4} \sin nt \, dt \right) \\
&= -\frac{3}{4n} \times \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^{-1/4} \sin nt \, dt \\
&= -\frac{3}{4n} b_n.
\end{aligned}$$