

Prova scritta di
ANALISI MATEMATICA III
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2015/2016

5 luglio 2016

1. Calcolare l'integrale

$$\int_A x \, dx dy$$

dove A è la regione piana compatta racchiusa dalle curve

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y = x, \quad x = 1.$$

2. Indicato con S il paraboloido di equazione $z = x^2 + y^2$, consideriamo la curva

$$\Gamma := \{(x, y, z) \in S \mid (x, y) \in [A; B]\}$$

dove $A := (1, 0)$ e $B = (0, 1)$. Calcolare

$$\int_{(\Gamma, \tau)} (2z, x, y)$$

dove τ è un campo vettoriale unitario tangente a Γ , scelto a piacimento.

3. Provare che:

- Non esistono polinomi di primo grado propri (i.e. $bx + c$ con $b \neq 0$) ortogonali alla funzione $\sin x$ in $L^2(-\pi, \pi)$;
- Un polinomio di secondo grado proprio (i.e. $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$) è ortogonale alla funzione $\sin x$ in $L^2(-\pi, \pi)$ se e solo se $b = 0$.

Infine:

- Determinare gli elementi della famiglia $\{\cos^k x, \sin^k x\}_{k=1}^{+\infty}$ che sono ortogonali alla funzione $\sin x$ in $L^2(-\pi, \pi)$.