Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA III
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2015/2016

25 gennaio 2016

1. Siano A e B, rispettivamente, il disco di raggio 1 centrato in $(1,0)$ e il disco di raggio $1/2$ centrato in $(1/2,0)$. Calcolare

$$\int_{A\setminus B} x + \sin(xy)\, d\mathcal{L}^2(x,y).$$

2. Si considerino:

- La superficie orientata (S,ν), dove S è il grafico della funzione

  $$(x,y) \mapsto \sqrt{1-x^2}, \quad (x,y) \in [-1,1]\times[0,1]$$

  e ν è il campo normale a S avente la terza componente positiva;
- Il campo vettoriale

  $$(x,y,z) \mapsto (yz, yz, yz), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Verificare che vale la formula di Stokes.

3. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni 2π-periodiche tali che:

- La funzione f è pari e $f(t) = t^{3/4}$ per ogni $t \in [0,\pi]$;
- La funzione g è dispari e $g(t) = t^{-1/4}$ per ogni $t \in [0,\pi]$.

Verificare che $g \in L^2(-\pi,\pi)$. Inoltre, indicati con a_n i coefficienti della serie di Fourier di f (soli coseni!) e con b_n i coefficienti della serie di Fourier di g (soli seni!), provare che vale l'identità

$$a_n = -\frac{3}{4n} b_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$