

Raccolta di esercizi di
ANALISI MATEMATICA III
per il Corso di Laurea in Matematica
a.a. 2015/2016

Silvano Delladio

September 7, 2016

Chapter 1

Integrali multipli

1.1

Sia $B \subset \mathbf{R}^3$ la palla di raggio 2 centrata nell'origine e si consideri

$$E := \{(x, y, z) \in B \text{ tali che } z \geq 1\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\int_E z \, dx \, dy \, dz.$$

[$9\pi/4$]

1.2

Sia E il cono avente per base il disco unitario in \mathbf{R}_{xy}^2 centrato nell'origine e per vertice il punto $(0, 0, 1)$. Calcolare

$$\int_E (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

1.3

Si consideri il cilindro

$$E := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, 1]\}$$

e si calcoli

$$\int_E \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy \, dz.$$

1.4

Calcolare

$$\int_E y \, dx \, dy \, dz$$

dove E è il seguente cilindro con basi parallele al piano \mathbf{R}_{xz}^2 :

$$E := \{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}.$$

[π]

1.5

Calcolare il volume della regione compresa fra i piani coordinati e il piano di equazione $z+x+2y=2$.

1.6

Calcolare

$$\int_A xy \, dx \, dy$$

dove A è il quadrilatero di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 1)$.

[7/12]

1.7

Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{y}{x^4} \, dx \, dy$$

dove A è la regione limitata di piano racchiusa dalle le curve di equazione

$$y = x, \quad y = 2x, \quad y = x^2, \quad y = 2x^2.$$

1.8

Si calcoli l'integrale

$$\int_A (x-1)^2 y \, dx \, dy$$

dove

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq 0, x^2 - 2x + \frac{y^2}{4} \leq 0\}.$$

1.9

Calcolare l'integrale

$$\int_A x^2 y \, dx dy$$

dove

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \leq -|x|\}.$$

1.10

Calcolare

$$\int_A x \, dx dy dz,$$

dove

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}.$$

1.11

Calcolare l'area dell'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq y \leq 3x, 1 \leq x + 3y \leq 3\}.$$

1.12

Calcolare il volume dell'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, z^2 \leq x^2 + y^2\}.$$

1.13

Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{y}{\sqrt{x}} \, dx dy$$

dove

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, 1/x \leq y \leq 2/x, \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}\}.$$

[2/3]

1.14

Calcolare l'integrale

$$\int_{C \cup S} (x^2 + y^2) dx dy dz$$

dove

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 + \sqrt{3(x^2 + y^2)} \leq z \leq 2\}$$

e $S \subset \mathbf{R}^3$ è la sfera di raggio unitario centrata nel punto $(0, 0, 1)$.

1.15

Si consideri la seguente curva in \mathbf{R}^3

$$\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = 0, y > 0, y^2 - z^2 = 1\},$$

e sia S la superficie ottenuta ruotando la curva γ attorno all'asse z . Chiamiamo E la regione semplicemente connessa dello spazio delimitata da S . Posto

$$A = \{(x, y, z) \in E : xy \geq 0, 0 \leq z \leq 1\},$$

si calcoli

$$\int_A \frac{1}{1+z^2} dx dy dz.$$

1.16

Si consideri la funzione così definita:

$$f(x, y) := 1 - \frac{x^2}{4} - y^2, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Descrivere l'insieme

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) \geq 0\}$$

e calcolare il volume di

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

1.17

Calcolare il volume dell'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

1.18

Si consideri il cono

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x^2 + y^2)^{1/2} \leq z \leq 1\}$$

e la palla B di raggio uno centrata nell'origine. Calcolare il volume di $C \setminus B$.

1.19

Calcolare l'integrale

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{1 + \frac{y}{2} - (x^2 + y^2)^{1/2}} dx dy dz$$

dove Γ è la regione limitata compresa fra il cono di equazione

$$x^2 + y^2 = z^2$$

e il piano di equazione

$$2z - y = 2.$$

1.20

Calcolare l'integrale

$$\int_{\Gamma} (1 + \cos y) dx dy dz$$

dove Γ è la regione di spazio ottenuta facendo ruotare il sottografico della funzione

$$y \mapsto \sin y, \quad y \in [0, \pi]$$

intorno all'asse y .

$$[\pi^2/2]$$

1.21

Siano A e B , rispettivamente, il disco di raggio 2 centrato in $(0, 0)$ e il disco di raggio 1 centrato in $(1, 0)$. Calcolare

$$\int_D xy + 1$$

dove $D := \{(x, y) \in A \setminus B \mid x \geq 0\}$.

[π]

1.22

Calcolare

$$\int_T x^2 dx dy$$

dove T è il triangolo del piano di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

[1/4]

1.23

Sia F la regione ottenuta facendo ruotare intorno all'asse y il triangolo di vertici $(0, 0, 0)$, $(0, -2, 2)$ e $(0, 1, 2)$. Calcolare

$$\int_F xz dx dy dz.$$

[0]

1.24

Calcolare il volume della regione finita di spazio compresa fra il cono di equazione $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ e il piano di equazione $z = 1 + y$.

[$\pi\sqrt{2}/3$]

1.25

Siano a, b, h numeri reali tali che

$$b \geq a > 0, \quad h > 0.$$

Calcolare il volume della “botte ellissoidale”

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, |z| \leq h \right\}$$

al variare di h .

$$\left[\text{Per } h \leq b : \pi a^2 \left(2h - \frac{2h^3}{3b^2} \right); \quad \text{Per } h > b : \frac{4}{3} \pi a^2 b \right]$$

1.26

Sia E la porzione limitata di spazio compresa fra il cilindro

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

e i piani

$$z = 0, \quad z = y.$$

Calcolare

$$\int_E (y - x) \, dx \, dy \, dz.$$

[$5\pi/4$]

1.27

Calcolare

$$\int_E [(x - y^{1/2}) \ln y + 1] \, dx \, dy$$

dove

$$E := \{(x, y) \mid y \in [0, 1], x \in [y^{1/2}, 1 + y^{1/2}]\}.$$

[$1/2$]

1.28

Calcolare

$$\int_E z \, dx dy dz$$

dove

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x, z \geq 0\}.$$

$[\pi/32]$

1.29

Calcolare

$$\int_E \ln(1 + x^2 + y^2)^z \, dx dy dz$$

dove

$$E := \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}.$$

$\left[\pi \left(\frac{5}{2} \ln 5 - \ln 2 - \frac{3}{2} \right) \right]$

1.30

Calcolare il volume del solido ottenuto facendo compiere all'insieme

$$D := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0, \sqrt{3}y \leq x, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

una rotazione completa intorno all'asse x .

$\left[\frac{7\pi}{12} \right]$

1.31

Posto

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq (1 + xy)^{1/2}\}$$

provare che

$$\int_S (x + y)z \, dx dy dz = 0.$$

1.32

Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione, intorno all'asse z , del triangolo di vertici

$$(0, 0, 0), \quad (0, 2, 0), \quad (0, 1, 1).$$

$$[2\pi]$$

1.33

Calcolare il volume dell'insieme

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq |x|, 0 \leq z \leq \frac{x^2 y}{x^2 + y^2 + 1} \right\}.$$

$$\left[\frac{\pi\sqrt{2}}{24} - \frac{\sqrt{2}}{9} \right]$$

1.34

Calcolare

$$\int_{\Pi} z(x^2 + y^2) dx dy dz$$

dove Π è la piramide avente per base il quadrato $ABCD$ con

$$A = (1, 1, 0) \quad B = (-1, 1, 0) \quad C = (-1, -1, 0) \quad D = (1, -1, 0)$$

e il vertice nel punto $(0, 0, 1)$.

$$\left[\frac{4}{45} \right]$$

1.35

Sia T il triangolo di vertici

$$(1, 0, 0), \quad (3, 0, 0), \quad (2, 0, 1).$$

Calcolare il volume del solido ottenuto facendo compiere a T una intera rotazione intorno all'asse z .

$$[4\pi]$$

1.36

Calcolare

$$\int_D \frac{1}{2x+y} dx dy$$

dove D è la regione piana limitata dalle curve

$$y = x, \quad 2y = x, \quad y = -2x^2 + 2x, \quad y = -x^2 + 2x.$$

$$\left[2 \ln \frac{6}{5} - \frac{1}{4}\right]$$

1.37

Calcolare

$$\int_E e^{x^2+y^2} dx dy dz$$

dove E è la regione di spazio ottenuta da una rotazione completa intorno all'asse z dell'insieme

$$\{(0, y, z) \mid 0 \leq y \leq [\ln(1+z)]^{1/2}, 0 \leq z \leq 1\}.$$

$$\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

1.38

Siano:

- E la regione limitata del piano yz racchiusa dalle curve

$$z = 0, \quad z = y^2, \quad z = 1 - y^2;$$

- V il solido ottenuto facendo ruotare E intorno all'asse z .

Calcolare

$$\int_V 2(x^2 + y^2 + z) dx dy dz.$$

$$\left[\frac{\pi}{3}\right]$$

1.39

Sia V il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 ottenuto da una rotazione completa della regione piana

$$\{(0, y, z) \mid 1/2 \leq y \leq 1, 2y^2 \leq z \leq y^2 + 1\}$$

intorno all'asse y . Calcolare

$$\int_V \frac{y}{(x^2 + z^2)^{1/2}} dx dy dz.$$

$$\left[\frac{9\pi}{32}\right]$$

1.40

Sia P la regione convessa del piano yz avente per frontiera il poligono di vertici

$$(0, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 2, 2), \quad (0, 0, 1).$$

Calcolare il volume della regione spaziale ottenuta facendo compiere a P una rotazione completa intorno all'asse y .

$$\left[\frac{10\pi}{3}\right]$$

1.41

Calcolare l'integrale

$$\int_D 1 - x^2 - y^2 dx dy$$

dove $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$[\pi/2]$$

1.42

Sia A la regione compatta del piano limitata dalle rette

$$y = x, \quad y = 2x, \quad y + x = 1, \quad y + x = 2.$$

Determinare il volume dell'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A, \quad 0 \leq z \leq (xy)^{-1}\}.$$

$$[\ln^2 2]$$

1.43

Sia A la regione compatta del piano yz compresa fra l'asse delle y e la curva $z = \sin y$, con $0 \leq y \leq 2\pi$. Calcolare il volume del solido ottenuto da una rotazione completa di A intorno all'asse z .

$$[8\pi^2]$$

1.44

Sia

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - y^2\}.$$

Calcolare il volume della porzione di B compresa fra i piani di equazioni $x = 0$ e $y = x$.

$$[1/2]$$

1.45

Sia Γ il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 ottenuto da una rotazione completa del triangolo di vertici

$$(0, 1, 0), \quad (0, 2, 0), \quad (0, 1, 1)$$

intorno all'asse z . Calcolare

$$\int_{\Gamma} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz.$$

$$[8\pi/15]$$

1.46

Sia D la regione connessa e limitata del primo quadrante di \mathbb{R}^2 compresa fra le rette $y = x/\sqrt{3}$, $y = x\sqrt{3}$ e le circonferenze $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$. Sia inoltre S il grafico di

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2, \quad (x, y) \in D.$$

Calcolare

$$\int_S \frac{(x+y)z}{(1+4z)^{1/2}} d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

$$[31(\sqrt{3} - 1)/5]$$

1.47

Sia V la regione di spazio ottenuta da una rotazione completa intorno all'asse z dell'insieme

$$\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in [0, 1], \sqrt{y} \leq z \leq 2 - y\}.$$

Calcolare

$$\int_V 2z \, dx dy dz.$$

$[7\pi/6]$

1.48

Calcolare

$$\int_E (1 - z)(x^2 + y^2)^{1/2} \, dx dy dz$$

dove E è la regione di spazio ottenuta da una rotazione completa intorno all'asse z dell'insieme

$$\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq (1 - z)^2, 0 \leq z \leq 1\}.$$

$[\pi/12]$

1.49

Calcolare il volume della regione

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq y \leq \ln(x^2 + z^2)\}.$$

$[\pi(8 \ln 2 - 3)]$

1.50

Siano A e B , rispettivamente, il disco di raggio 2 centrato nell'origine e il disco di raggio 1 centrato in $(1, 0)$. Calcolare

$$\int_T (x^2 + y^2)^{-1/2} \, dx dy$$

dove

$$T := \{(x, y) \in A - B \mid 0 \leq y \leq x\sqrt{3}\}.$$

$[2\pi/3 - \sqrt{3}]$

1.51

Sia C il cono avente per base il disco di raggio 2 centrato nell'origine e contenuto nel piano xy e per vertice il punto $(0, 0, 2)$. Posto

$$T := \{(x, y, z) \in C \mid 0 \leq z \leq 1\}$$

calcolare

$$\int_T \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{(2 - z)^2} dx dy dz.$$

$[\pi]$

1.52

Se $z \in \mathbb{R}$, indichiamo con D_z il disco unitario centrato in $(0, z, z)$ e parallelo al piano xy . Posto

$$\Gamma := \bigcup_{z \in [0, 1]} D_z$$

calcolare

$$\int_{\Gamma} 4 [(y - z)^2 + x^2] dx dy dz.$$

$[2\pi]$

1.53

Sia F la regione limitata del primo quadrante del piano yz racchiusa dalle curve

$$z = y^2, \quad y = z^2.$$

Calcolare

$$\int_V |xz| dx dy dz$$

dove V è ottenuto dalla rotazione di F intorno all'asse y .

$[1/9]$

1.54

Calcolare

$$\int_E z \sin(xy) \, dx dy dz$$

dove

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in [-1, 1], x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

[0]

1.55

Calcolare

$$\int_E \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \, dx dy$$

dove

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$[2 - \pi/2]$

1.56

Si considerino, nel piano xy di \mathbb{R}^3 , due dischi di raggio 2 centrati rispettivamente in $(0, -1, 0)$ e $(0, 1, 0)$. Indichiamo con E la regione ottenuta da una rotazione completa dell'unione di questi due dischi intorno all'asse y . Calcolare

$$\int_E 2|y| \, dx dy dz.$$

$[45\pi]$

1.57

Si calcoli

$$\int_E \frac{2y}{x} \, dx dy$$

dove E è la regione compatta del semipiano $x > 1$ limitata dalle curve

$$y = \ln x, \quad y = 2 \ln x, \quad y \ln x = 1, \quad y \ln x = 2.$$

$[20/3 - 4\sqrt{2}]$

1.58

Sia E la regione compatta racchiusa dal paraboloido Π_1 di equazione $z = x^2 + y^2$ e dal paraboloido Π_2 di equazione $z = 1 - (x - 1)^2 - y^2$. Si usi il teorema della divergenza per calcolare il flusso del campo di vettori

$$F(x, y, z) := \left(xy, x - \frac{y^2}{2}, z \right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

uscite dalla frontiera di E .

[$\pi/16$]

1.59

Per $t \in (0, 1)$, si consideri l'insieme

$$E_t := \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 - \frac{x^2}{t^2} - \frac{y^2}{(1-t)^2} \right\}.$$

Disegnare il grafico della funzione $t \rightarrow m_3(E_t)$ e determinare per quale valore di t tale funzione raggiunge il suo massimo.

[1/2]

1.60

Si considerino

$$\Gamma_0 := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

e

$$\Gamma_1 := \{(x, y, z) \mid (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Calcolare il volume della regione formata dai punti di Γ_1 che non appartengono a Γ_0 .

[$\pi/3 + \sqrt{3}/2$]

1.61

Siano Σ_0 e Σ_1 , rispettivamente, la sfera di raggio 2 centrata nell'origine e la sfera di raggio 1 centrata in $(0, 2, 0)$. Calcolare il volume di $\Sigma_0 \cap \Sigma_1$.

[$13\pi/24$]

1.62

Sia E il solido ottenuto da una rotazione completa della regione piana

$$\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

intorno all'asse delle x . Calcolare

$$\int_E \frac{yz}{(1+x)^\pi} + 1 \, dx dy dz.$$

$[\pi/3]$

1.63

Posto

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad E := \{(x, y, z) \in C \mid y \leq z \leq y + 1\}$$

si svolgano i seguenti punti:

- (i) Calcolare $\mathcal{L}^3(E)$;
- (ii) Servirsi del risultato ottenuto in (i) e del teorema della divergenza per calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := (x, -y, z)$$

attraverso $\partial C \cap \partial E$ orientata dal campo normale esterno a E .

$[\pi; 0]$

1.64

Per $t \in (0, 1]$, sia E_t l'insieme dei punti (x, y) soddisfacenti la disequazione

$$x^2 + \frac{y^2}{t^2} \leq 1$$

e sia V_t il solido ottenuto da una rotazione completa di E_t intorno all'asse x . Rappresentare graficamente l'insieme E_t , calcolare esplicitamente il numero $\mathcal{L}^3(V_t)$ e disegnare il grafico della funzione $t \mapsto \mathcal{L}^3(V_t)$ per $t \in (0, 1]$.

$[4\pi t^2/3]$

1.65

Calcolare

$$\int_E (x^2 + y)z \, dx dy dz$$

dove E è l'insieme ottenuto da una rotazione completa di

$$\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{y}\}$$

intorno all'asse delle z .

$[\pi/10]$

1.66

Calcolare $\mathcal{L}^3(E)$, dove

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y \leq x\sqrt{3}, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}.$$

$[\pi/48]$

1.67

Calcolare

$$\int_{\Gamma} (x^2 + y^2 - 2y)e^z \, d\mathcal{L}^3(x, y, z)$$

dove

$$\Gamma := \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + (y - 1)^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}.$$

$[9(e^2 - 1)\pi/2]$

1.68

Calcolare

$$\int_E ye^x \, dx dy$$

dove E indica la regione limitata del piano racchiusa dalle curve

$$y = e^x, \quad y = 2e^x, \quad y = e^{-x}, \quad y = 3e^{-x}.$$

$[2(2^{1/2} - 1)(3^{3/2} - 1)/3]$

1.69

Calcolare

$$\int_E 2(y-x)(2x+1) d\mathcal{L}^2(x,y)$$

dove E è il sottoinsieme compatto del primo quadrante del piano cartesiano racchiuso dalle curve

$$y = x, \quad y = x + 1, \quad y = 2 - x^2, \quad y = 3 - x^2.$$

[1]

1.70

Siano A e B , rispettivamente, il disco di raggio 1 centrato in $(1, 0)$ e il disco di raggio $1/2$ centrato in $(1/2, 0)$. Calcolare

$$\int_{A \setminus B} x + \sin(xy) d\mathcal{L}^2(x,y).$$

$[7\pi/8]$

1.71

Calcolare il volume dell'insieme

$$E := \{(x, y, z) \in P \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

dove P è la piramide avente come vertici i punti

$$(-1, -1, 0), \quad (1, -1, 0), \quad (1, 1, 0), \quad (-1, 1, 0), \quad (0, 0, 1).$$

$[\pi - \frac{4\sqrt{2}}{3}]$

1.72

Calcolare l'integrale

$$\int_A x dx dy$$

dove A è la regione piana compatta racchiusa dalle curve

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y = x, \quad x = 1.$$

$$\left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

1.73

Calcolare

$$\int_C z \, dx \, dy \, dz$$

dove C è il cono avente per base l'ellisse

$$\{(x, y, 0) \mid x^2/4 + y^2 \leq 1\}$$

e il vertice in $(0, 0, 1)$.

$$[\pi/6]$$

Chapter 2

Vettori e campi vettoriali

2.1

Disegnare i (grafici dei) seguenti campi di vettori, dopo averne determinato i corrispondenti domini:

$$\varphi(x, y) = (xy, x/y), \quad \varphi(x, y) = (\sqrt{x+y-2}, 0), \quad \varphi(x, y) = (x, x^2 - y).$$

2.2

Dati i vettori

$$v_1 = (1, -2), \quad v_2 = (-3, 0), \quad v_3 = (-1, 4)$$

determinare $v_1 + v_2 - v_3$, $3v_1 - 2v_2 + v_3$, $|5v_1|$, $|v_1 - v_2|$. Determinare inoltre il vettore v tale che $v_1 - 3v = 2v_2$.

2.3

Stabilire se i punti delle seguenti terne sono allineati:

$$\{(1, 3); (2, 5); (3, 10)\}, \quad \{(0, 0, 0); (2, 2, 0), (-1, -1, 0)\}.$$

2.4

Determinare, nei seguenti due casi, l'angolo compreso fra i vettori v e w :

$$v = (1, -1, -1), w = (2, 1, 1) \quad \text{e} \quad v = (1, -2, 2), w = (2, 3, -6)$$

2.5

Con riferimento all'esercizio 2.4, trovare (nei due casi) un vettore perpendicolare a v e a w .

Chapter 3

Curve e superfici

3.1

Determinare il piano passante per l'origine e perpendicolare alla retta parametrizzata da $v(t) = t(1, -1, 5)$.

3.2

Trovare la retta tangente alla curva parametrizzata da $v(t)$ nel punto P :

$$v(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t, \sin t \cos t), P = v(\pi/3); \quad v(t) = (t, t^2, t^3), P = (1, 1, 1).$$

3.3

Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P_0 :

$$f(x, y) = 2x^2y + y^2 + 3, P_0 = (1, 1, 6); \quad f(x, y) = e^{x^2y} + \sin(xy), P_0 = (0, 0, 1).$$

Chapter 4

Integrali su curve e superfici

4.1

Calcolare l'integrale di linea lungo le seguenti curve C del campo vettoriale $v(x, y) = (\sin x \cos y, e^{xy})$:

$$C : 0 \leq x \leq \pi, y = \frac{\pi}{3}; \quad C : 0 \leq y \leq 1, x = 2.$$

4.2

Calcolare l'integrale di linea lungo le seguenti curve C del campo vettoriale $v(x, y) = (-y, x)$:

$$C : y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad C : y = x^{1/3}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

4.3

Calcolare la lunghezza del bordo di G_f , dove

$$f(x, y) : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) := x^2 - xy.$$

4.4

Calcolare l'area del quadrilatero ottenuto intersecando il piano di equazione $z - 2y + 3x = 10$ col cilindro a sezione quadrata $[0, 1] \times [0, 1] \times \mathbf{R}$.

4.5

Consideriamo l'ellisse E di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e il campo vettoriale in \mathbf{R}^2

$$F(x, y) := (-y, x).$$

Calcolare

$$\int_E F \bullet ds$$

(suggerimento: usare la parametrizzazione $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi)$). Servirsi poi del teorema di Green per calcolare $\text{mis}(E)$.

4.6

Se D è il disco di raggio 1 centrato in $(0, 0)$, sia

$$f : D \rightarrow \mathbf{R}$$

la funzione definita da $f(x, y) := xy + 1$. Si consideri anche il campo di vettori

$$F(x, y, z) := (-y, x, z).$$

- Calcolare

$$\int_D f(x, y) dx dy.$$

- Ricavare l'espressione in coordinate cartesiane di un campo regolare di vettori normali al grafico G_f .
- Calcolare $\text{rot } F$.
- Servirsi del teorema di Stokes e dei due punti precedenti per valutare l'integrale

$$\int_{G_f} \frac{2}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dS.$$

$[\pi; (-y, -x, 1)/\sqrt{1+x^2+y^2}; \text{rot } F = (0, 0, 2); 2\pi]$

4.7

Calcolare l'area della porzione di paraboloido $z = x^2 + y^2$ compresa tra i cilindri di equazioni $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 2$.

4.8

Per ogni $n \in \mathbf{N}$, sia γ_n il grafico della funzione $g_n : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}$ così definita:

$$g_n(t) := \begin{cases} nt & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ n & \text{se } 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Si calcoli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} e^{-3x-y}.$$

4.9

Dati la superficie

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$$

(orientata a piacere) e il campo di vettori

$$F(x, y, z) := (e^{-z^2}, e^{-z^2}, 0),$$

calcolare

$$\int_C F \bullet dS.$$

[0]

4.10

Sia $F(x, y, z) := (2y, -x, -x)$ e C la circonferenza unitaria nel piano di equazione $z = y$ (centrata nell'origine). Calcolare il lavoro compiuto da F lungo C orientata a piacere.

4.11

Considerato l'insieme

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ e } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

calcolare il seguente integrale applicando il teorema di Green

$$\int_{\partial\Omega} -y dx + \ln(x^2 + y^2) dy = \int_{\partial\Omega} (-y, \ln(x^2 + y^2)) \bullet ds.$$

4.12

Sia C la superficie ottenuta ruotando il grafico della funzione $y \mapsto 2|y|$ attorno all'asse z . Posto

$$T := \{(x, y, z) \in C \mid 1 \leq z \leq 2\},$$

calcolare l'integrale

$$\int_T z \, dS.$$

[$7\pi\sqrt{5}/6$]

4.13

Si consideri la superficie

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2, y < 1\}$$

orientata in modo tale che il suo vettore normale nel punto $(0, 0, \sqrt{2})$ coincida con $(0, 0, 1)$. Posto

$$F(x, y, z) := (xy, (y-1)e^{z^2} \cosh x, yz), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

si calcoli

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot dS.$$

Quanto vale tale integrale se si sceglie per S l'altra possibile orientazione?

[0]

4.14

Sia $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definito da

$$F(x, y) := (x \arctan y, x), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

e sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$. Si calcoli

$$\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

4.15

Calcolare l'area della superficie ottenuta ruotando la curva

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y \in [0, 1], x = 0, z = 1 - y^2\}$$

intorno all'asse y .

4.16

Sia $D \subset \mathbf{R}^2$ il disco unitario centrato in 0 e

$$f(x, y) := 1 + (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad (x, y) \in D.$$

Calcolare

$$\int_{G_f} \cos(z - 1)^2 dS$$

dove G_f è il grafico di f .

4.17

Si consideri il cilindro avente raggio 1 e asse coincidente con l'asse delle x . Calcolare l'area delle regioni limitate e connesse di tale cilindro, ottenute sezionandolo coi piani

$$y = x, \quad y = -x.$$

[4; 4]

4.18

Indicato con G il grafico della funzione

$$(x, y) \mapsto \frac{\varepsilon}{2}(x^2 + y^2), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad (\varepsilon > 0)$$

si calcoli l'area della regione di G contenuta nel cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Calcolare il limite di quest'area, per $\varepsilon \downarrow 0$ (se lo si preferisce, ci si avvalga di un argomento intuitivo).

$$\left[\frac{2\pi}{3\varepsilon^2} ((\varepsilon^2 + 1)^{3/2} - 1); \pi \right]$$

4.19

Il grafico della funzione

$$(x, y) \mapsto x^2 + 4y^2$$

divide il piano di equazione

$$z = 2x + 8y - 1$$

in due regioni, di cui una finita. Calcolare l'area di quest'ultima.

$$[2\pi\sqrt{69}]$$

4.20

Calcolare l'area della regione costituita dai punti del piano

$$z = \sqrt{5}y$$

interni all'ellissoide

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1.$$

$$[2\pi\sqrt{6}]$$

4.21

Sia P il parallelogramma nel piano di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$ e poniamo

$$S := \{(x, y, x^2 + y^2) \mid (x, y) \in P\}.$$

Calcolare

$$\int_S \frac{xy}{\sqrt{1+4z}} d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

$$\left[\frac{7}{12}\right]$$

4.22

Sia Σ l'arco di elica parametrizzato da

$$t \mapsto (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

e si consideri il campo di vettori

$$F(x, y, z) := (2xz, 2yz, x^2 + y^2), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Calcolare $\int_{\Sigma} F$.

$$[2\pi]$$

4.23

Indicata con C la curva ottenuta dall'intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con il piano $x + y = z$, si calcoli

$$\int_C \sqrt{3(x^2 + y^2) - z^2} d\mathcal{H}^1.$$

[4π]

4.24

Posto

$$S_\varepsilon := \{(x, y, \ln(x^2 + y^2)^{1/2}) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2, \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\} \quad (\varepsilon > 0)$$

calcolare

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} d\mathcal{H}^2.$$

[2π]

4.25

Sia C l'ellisse ottenuta intersecando il cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$ con il piano di equazione $z = x$. Calcolare

$$\int_C (1 + y^2)^{1/2} ds.$$

[3π]

4.26

Sia S il grafico della funzione

$$T \ni (x, y) \mapsto e^{3x+4y}$$

dove T è il triangolo piano di vertici $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 3)$. Calcolare

$$\int_S (1 + 25z^2)^{1/2} d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

$$\left[\frac{313}{48} + \frac{575}{48} e^{24} \right]$$

4.27

Sia E la porzione limitata di spazio compresa fra il cilindro

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

e i piani

$$z = 0, \quad z = y.$$

Calcolare il flusso uscente da E del campo vettoriale $(x, y, z) \mapsto (z - y, zx - yx, zy - y^2)$. Come si spiega l'uguaglianza fra questo risultato e quello dell'esercizio 1.26 ?

[$5\pi/4$]

4.28

Si consideri la funzione

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{x - y}{2(x + y)}$$

dove D è il parallelogramma di vertici $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 2)$ e $(3, 2)$. Calcolare

$$\int_{G_f} \frac{(x - y)^3 z^{-2}}{\sqrt{(x + y)^4 + x^2 + y^2}} dS.$$

[6]

4.29

Si consideri la superficie

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, z \leq 1\}$$

e il campo di vettori

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (y, -x, x + y + z).$$

Verificare che vale il Teorema di Stokes (comunque si orienti S)

$$\int_{\bar{S}} \operatorname{rot} F = \int_{\partial \bar{S}} F.$$

[Entrambi gli integrali valgono $\pm 2\pi$]

4.30

Si considerino: il cilindro

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\},$$

il campo normale “esterno” a C

$$N : C \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad N(x, y, z) := (x, y, 0)$$

e infine un campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, di classe C^1 , della forma

$$F(x, y, z) := (a(x, y), b(x, y), c(x, y, z)).$$

Verificare che, in questa situazione, la formula di Stokes

$$\int_{\partial(C,N)} F = \int_{(C,N)} \text{rot } F$$

si riduce all’uguaglianza

$$\int_C x \frac{\partial c}{\partial y} - y \frac{\partial c}{\partial x} = 0.$$

4.31

Si consideri il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (0, x)$$

e la regione limitata E racchiusa dalle curve di equazione

$$y = 0, \quad x + y = 2, \quad y = x^2 \quad (x \geq 0).$$

Calcolare

$$\int_{\partial E} F$$

e mostrare che il risultato trovato coincide con l’area di E .

[$\frac{5}{6}$]

4.32

Si considerino il quadrato Q di vertici

$$(0, 0, 0) \quad (1, 0, 0) \quad (1, 1, 0) \quad (0, 1, 0)$$

e il campo di vettori

$$F(x, y, z) := (y(z + 1), x^2(1 - z^2), \ln(1 + x^2 y^2 z^4)), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Usare il Teorema di Stokes per calcolare l’integrale di F lungo ∂Q , con l’orientazione indotta dall’elenco dei vertici di cui sopra.

[0]

4.33

Sia T il triangolo di vertici

$$(1, 0, 0), \quad (3, 0, 0), \quad (2, 0, 1).$$

Calcolare l'area della superficie del solido ottenuto facendo compiere a T una intera rotazione intorno all'asse z .

$$[8\pi(1 + \sqrt{2})]$$

4.34

Un piano Π , coincidente all'istante iniziale ($t = 0$) con il piano xz , ruota intorno all'asse z con velocità angolare unitaria. Si considerino i due punti A e B in Π che, per $t = 0$, occupano le posizioni $(1, 0, 0)$ e $(2, 0, 1)$ rispettivamente. Supponiamo che il punto $P \in \Pi$ percorra il segmento AB con velocità costante dalla posizione iniziale A (per $t = 0$) alla posizione finale B (per $t = 2\pi$). Determinare la posizione $\gamma(t)$ occupata da P all'istante t . Calcolare inoltre la lunghezza della traiettoria compiuta da P (per $0 \leq t \leq 2\pi$).

$$\left[\left(\frac{x^2}{8} + \ln x - \frac{1}{2x^2} \right) \frac{\sqrt{4\pi^2 + 2} - 2\pi}{\sqrt{16\pi^2 + 2} - 4\pi} \right]$$

4.35

Sia C la semicirconferenza orientata nel quadrante piano

$$\{(0, y, z) \mid y \geq 0, z \geq 0\}$$

avente l'origine come punto iniziale e $(0, 0, 2)$ come punto finale. Calcolare

$$\int_C F$$

dove F è il campo vettoriale definito nell'esercizio 5.25.

$$\left[\frac{8}{3} \right]$$

4.36

Sia C una curva piana regolare e sia

$$S := C \times [a, b] = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in C, z \in [a, b]\}.$$

Dimostrare che $\mathcal{H}^2(S) = (b - a)\mathcal{H}^1(C)$.

4.37

Sia P la regione convessa del piano yz avente per frontiera il poligono di vertici

$$(0, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 2, 2), \quad (0, 0, 1).$$

Calcolare

$$\int_{\partial P} (0, -z, y)$$

dove l'orientazione scelta per ∂P è quella indotta dall'ordine in cui sono stati elencati i suoi vertici.

[4]

4.38

Calcolare l'area della superficie

$$\{(x, y, x^2 - y^2) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$[\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)]$

4.39

Sia A la regione compatta del piano limitata dalle rette

$$y = 0, \quad y = x, \quad y + x = 1, \quad y + x = 2$$

e sia S il grafico della funzione

$$A \rightarrow \mathbf{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y.$$

Calcolare

$$\int_S (x + y)z \, d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

$[\frac{15\sqrt{3}}{8}]$

4.40

Sia Γ l'insieme definito nell'esercizio 1.45 e sia

$$S := \{(x, y, z) \in \partial\Gamma \mid x^2 + y^2 > 1, z > 0\}.$$

Calcolare

$$\int_S z \, d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

$[4\pi\sqrt{2}/3]$

4.41

Sia \bar{G} il grafico della funzione

$$(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2), \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

orientato dal campo normale avente la terza componente positiva. Calcolare

$$\int_{\partial\bar{G}} (-y, x, \sin(xy))$$

$[6\pi]$

4.42

Sia \bar{C} la curva orientata avente come luogo

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x \geq 0, x^2 + z^2 = 1\}$$

percorsa nel senso in cui z cresce. Calcolare l'integrale

$$\int_{\bar{C}} (-z, z(x+y), x).$$

$[\pi]$

4.43

Calcolare l'area della superficie ottenuta ruotando intorno all'asse y la curva del piano yz di equazione $z = y^2$ con $y \in [0, 1]$.

4.44

Sia S_θ la superficie ottenuta da una rotazione completa intorno all'asse y del segmento di estremi

$$(0, 0, 1), \quad (0, \cos \theta, 1 + \sin \theta).$$

Calcolare $\mathcal{H}^2(S_\theta)$ e disegnare il grafico di $\theta \mapsto \mathcal{H}^2(S_\theta)$, con $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

$$[\pi(2 + \sin \theta)]$$

4.45

Calcolare $\mathcal{H}^2(\partial E)$, dove E è il solido definito nell'esercizio 5.33.

4.46

Calcolare l'integrale di superficie

$$\int_S (x + y - z) d\mathcal{H}^2(x, y, z)$$

dove

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1, z = y\}.$$

$$[0]$$

4.47

Calcolare l'area della regione compatta del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ racchiusa dal segmento $\{(1, 0)\} \times [1, 2]$ e dalle due eliche

$$t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t), \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 2t)$$

con $t \in [0, 1]$.

$$[\pi]$$

4.48

Sia Γ il cono di equazione $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ e sia S la spirale parametrizzata da

$$\gamma(t) := (t \cos t, t \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Sia inoltre C la curva regolare inclusa in Γ e tale che S coincide con la proiezione ortogonale di C in \mathbb{R}_{xy}^2 . Calcolare

$$\int_C (2 + z^2)^{-1/2} d\mathcal{H}^1(x, y, z).$$

[2 π]

4.49

Siano Π_1 e Π_2 i paraboloidi definiti nell'esercizio 1.58. Calcolare

$$\int_{\Pi_1 \cap \Pi_2} (1 + 4y^2 + x - z)^{1/2} d\mathcal{H}^1(x, y, z).$$

[3 π /2]

4.50

Sia S il sottoinsieme limitato del paraboloide $z = x^2 + y^2$ compreso fra i piani di equazioni $z = 2y$ e $z = 4y$. Calcolare poi l'integrale

$$\int_S (1 + 4x^2 + 4y^2)^{-1/2} d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

[3 π]

4.51

Si considerino le sfere Σ_0 e Σ_1 dell'esercizio 1.61. Calcolare l'area di $\Sigma_1 \cap \partial\Sigma_0$.

[π]

4.52

Per $\varepsilon > 0$, definiamo $C_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ e indichiamo con S_ε il grafico della funzione

$$f_\varepsilon : C_\varepsilon \rightarrow (0, +\infty), \quad f_\varepsilon(x, y) := (x^2 + y^2)^{-1/4}.$$

Provare che

$$\mathcal{H}^2(S_\varepsilon) \leq (3 - \varepsilon^{1/2})\pi.$$

4.53

Calcolare

$$\int_{(\partial S, \tau)} F$$

dove:

- (i) $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid 0 \leq y \leq x, z \geq 0\}$;
- (ii) τ è un campo unitario tangente a ∂S , scelto arbitrariamente fra quelli continui nelle parti interne dei tratti regolari;
- (iii) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) := (yz, yz, yz)$.

$$\left[\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}} \right]$$

4.54

Calcolare

$$\int_{\Gamma} \sqrt{2y(x^2 + z^2)} d\mathcal{H}^1(x, y, z)$$

dove Γ è la curva ottenuta dall'intersezione del cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$ col cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

$$[5\pi]$$

4.55

Si consideri la curva regolare orientata (C, τ) , dove

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2\}$$

e l'orientazione τ è scelta a piacere fra le due possibili. Calcolare

$$\int_{(C, \tau)} (\ln(2x - z + 1), x + y - 1, -yz/4).$$

$$[2\pi]$$

4.56

Sia E la regione compatta del piano racchiusa dalle curve

$$y = x^2, \quad y = 2x^2, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{2x}.$$

e sia $F : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo di vettori definito come segue

$$F(x, y) := \left(\ln x, \frac{3}{2}x^2 + \sin y \right).$$

Usare il teorema di Green per calcolare

$$\int_{(\partial E, \tau_E)} F$$

dove τ_E indica l'orientazione positiva di ∂E .

$$[9(16^{1/3} - 1)(1 - 32^{-1/3})/20]$$

4.57

Si consideri la superficie

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, z = 1 - y\}$$

e il campo di vettori $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ così definito

$$F(x, y, z) := \left(\frac{y^2}{2} + z, xy, \sin(y + z) \right).$$

Scelta a piacimento l'orientazione τ di ∂S , calcolare

$$\int_{(\partial S, \tau)} F$$

servendosi del teorema di Stokes.

$$[\pi/2]$$

4.58

Calcolare

$$\int_S \frac{x^2 + y^2}{e^z} d\mathcal{H}^2(x, y, z)$$

dove S è la superficie ottenuta facendo ruotare la curva $\{(0, y, \ln y) \mid y \in [1, 2]\}$ intorno all'asse z .

$$[2\pi(5^{3/2} - 2^{3/2})/3]$$

4.59

Sia S la superficie ottenuta facendo ruotare l'insieme

$$\{(0, y, \cos y) \mid y \in [0, \pi/2]\}$$

intorno all'asse z . Provare che la funzione

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2-z^2}}, \quad (x, y, z) \in S$$

è limitata e calcolare

$$\int_S \frac{1}{\sqrt{2-z^2}} d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

$[\pi^3/4]$

4.60

Calcolare

$$\int_C \frac{(5-x^2-4y^2)z}{(3y^2+10)^{1/2}} d\mathcal{H}^1(x, y, z)$$

dove C è l'elica ellittica parametrizzata da

$$\gamma(t) := (2 \cos t, \sin t, 3t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

$[6\pi^2]$

4.61

Indicato con S il paraboloido di equazione $z = x^2 + y^2$, consideriamo la curva

$$\Gamma := \{(x, y, z) \in S \mid (x, y) \in [A; B]\}$$

dove $A := (1, 0)$ e $B = (0, 1)$. Calcolare

$$\int_{(\Gamma, \tau)} (2z, x, y)$$

dove τ è un campo vettoriale unitario tangente a Γ , scelto a piacimento.

$[\pm 1/2]$

4.62

Si consideri la calotta parabolica ottenuta facendo ruotare la curva

$$\{(0, y, z) \mid z = 1 - y^2, y \in [0, 1]\}$$

intorno all'asse z . Calcolare il valore di q per il quale il piano $z = q$ divide la calotta in due superfici di area uguale.

$$[q = \frac{1}{4}(5 - (\frac{1+5^{3/2}}{2})^{2/3})]$$

Chapter 5

Flusso di un campo vettoriale

5.1

Si consideri il semidisco

$$D := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

e si indichi con E il sottografico della funzione $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) := y.$$

Sia inoltre dato il seguente campo di vettori

$$F(x, y, z) := (0, 1 - x^2 - y^2, -y).$$

Calcolare allora i seguenti due flussi (uscanti da E) di F :

- quello attraverso la “superficie laterale”, cioè la parte di ∂E che giace parallela all’asse z ;
- quello attraverso la “base” D .

Infine, usando il teorema di Gauss della divergenza, determinare il flusso ascendente di F attraverso il grafico di f .

5.2

Sia $B \subset \mathbf{R}^2$ il disco di raggio 1 centrato in $(0, 1)$. Si consideri inoltre la funzione $f : B \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) := x^2 + y^2 + 1$$

e si denoti con E il suo grafico. Allora:

- calcolare l'integrale di superficie

$$\int_E \frac{y^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS;$$

- assumendo ∂E orientata compatibilmente con la direzione positiva dell'asse z , calcolare

$$\int_{\partial E} F \bullet ds$$

dove $F(x, y, z) := (z, xy^2, x)$.

Come si può giustificare l'uguaglianza di questi due integrali?

5.3

Sia $D \subset \mathbf{R}^2$ il disco di raggio 1 centrato nell'origine e consideriamo la funzione $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) := 1 - (x^2 + y^2) = 1 - x^2 - y^2.$$

Sia inoltre F il campo vettoriale in \mathbf{R}^3 dato da

$$F(x, y, z) := (x, 0, 0).$$

Affrontare le seguenti questioni:

- calcolare il flusso Φ di F attraverso il grafico di f (orientato dal campo delle normali aventi la terza componente positiva);
- calcolare la misura μ del sottografico di f ;
- utilizzare il teorema della divergenza di Gauss per spiegare l'apparente coincidenza $\Phi = \mu$.

5.4

Si consideri la funzione

$$f(x, y) : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) := x^2 - xy$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (1, 0, x).$$

Denotata con G_f la superficie data dal grafico di f e scelta per essa l'orientazione corrispondente al campo normale avente la terza componente positiva, si calcoli

$$\int_{G_f} F \bullet dS.$$

[0]

5.5

Calcolare

$$\int_C F \bullet ds$$

dove C è il bordo del semidisco

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

percorso in senso antiorario e

$$F(x, y) := (xy, \ln(y + 1)).$$

5.6

Si consideri la funzione

$$f := [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) := x^2 + xy$$

e il campo vettoriale in \mathbf{R}^3

$$F(x, y, z) := (x, z, 0).$$

Calcolare il flusso di F attraverso il grafico di f , scegliendo il verso di attraversamento concorde alla direzione positiva dell'asse \mathbf{R}_z .

5.7

Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) := \left(\frac{x}{2}, 0, z - y^2 + 1 \right)$$

per la superficie data dal grafico della funzione

$$f(u, v) := u^2 + v^2 : B_1(0, 0) \rightarrow \mathbf{R}$$

attraversata nella direzione in cui z cresce.

5.8

Sia $D \subset \mathbf{R}^2$ il disco unitario centrato nell'origine e si consideri $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) := \frac{e^{x \sin y} \ln(1 + x^2 + y^2)}{2 + \cos(x - y)}.$$

Calcolare il flusso (ascendente) attraverso il grafico di f del campo

$$F(x, y, z) := (0, 0, 2y).$$

5.9

Sia $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ il campo vettoriale definito come segue

$$F(x, y) := (x^3 y, \cos x).$$

Calcolare il flusso di F attraverso la curva

$$C := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$$

nella direzione uscente dal disco unitario.

[0]

5.10

Siano dati l'insieme

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3}/2 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

e il campo di vettori

$$F(x, y, z) := (y^3 e^{z^2}, y, \arctan x), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Calcolare il flusso di F uscente dalla superficie ∂D .

5.11

Si consideri la piramide P con “punta” in $(0, 0, 1)$ e avente per base il quadrato di vertici $(1, 1, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(-1, -1, 0)$, $(1, -1, 0)$. Inoltre, sia dato il campo definito da

$$F(x, y, z) := (2x - (2 + x) \ln(2 + x), y \ln(2 + x), x + z), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Calcolare il flusso (ascendente) di F attraverso la superficie laterale di P .

5.12

Applicare il teorema di Gauss della divergenza e il risultato dell'esercizio precedente per calcolare l'area di $\partial B \cap C$ (suggerimento: considerare il campo $F(x, y, z) := (x, y, z)$).

5.13

Si consideri la regione limitata E la cui frontiera è data dall'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Usare il Teorema di Green per determinare l'area di $\{(x, y) \in E \mid x \geq 1\}$.

5.14

Sia B la palla di raggio 1 centrata nell'origine e C il cono

$$\{(x, y, z) \mid z \geq (x^2 + y^2)^{1/2}\}.$$

Considerato il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2 - 1)(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

calcolare

$$\int_{B \cap C} \operatorname{div} F$$

dapprima in modo diretto e in seguito avvalendosi del Teorema di Gauss della divergenza.

[0]

5.15

Sia E l'intersezione fra il cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e il piano $z = y$. Scelta per E un'orientazione τ , calcolare

$$\int_{(E, \tau)} (x, y, z).$$

[0]

5.16

Sia D il disco nel piano coordinato xz , di raggio unitario e centro l'origine. Calcolare il flusso del campo

$$(x, y, z) \mapsto \left(\cos(x + y), \frac{xz}{1 + y^2}, \ln(1 + x^2) \right)$$

attraverso D orientato a piacere.

[0]

5.17

Si consideri il campo vettoriale

$$F : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z > -1\} \rightarrow \mathbf{R}^3$$

definito come segue

$$F(x, y, z) := \left(xz, \frac{y}{z+1}, -\frac{z^2}{2} + z - \ln(1+z) \right).$$

Inoltre, indicato con D il disco unitario del piano xy centrato nell'origine, sia E il sottografico della funzione

$$D \ni (x, y) \mapsto f(x, y) := [1 + \sin(xy)](1 - x^2 - y^2).$$

Calcolare dapprima l'integrale

$$\int_E \operatorname{div} F$$

e poi, servendosi del risultato ottenuto e del teorema della divergenza, calcolare anche il flusso (ascendente) di F attraverso il grafico di f .

$[\pi/2 ; \pi/2]$

5.18

Sia C il cono con il vertice in $(0, 0, 1)$ e avente come base il disco unitario del piano xy centrato nell'origine. Inoltre, si indichi con S la semisfera

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 0\}.$$

Posto $V := C \cup S$ e considerato il campo

$$F(x, y, z) := (x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,$$

si verifichi che vale il Teorema della divergenza

$$\int_V \operatorname{div} F = \int_{\partial V} F \cdot N$$

dove N è il campo delle normali esterne a V nei suoi punti di frontiera.

[I due integrali valgono 3π]

5.19

Determinare il campo $G = (G_1, G_2)$ avente come potenziale la funzione

$$(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)\sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Servirsi del Teorema di Green per calcolare

$$\int_D G_1 - G_2$$

dove D è il disco unitario centrato nell'origine.

$$\left[\frac{2+x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^{1/2}}(x, y); 0 \right]$$

5.20

Siano dati il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (zy, zx, y(x+1)), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e la curva poligonale chiusa \overline{C} congiungente (nell'ordine) i seguenti punti

$$(0, 0, 0); \quad (1, 0, 0); \quad (1, 1, 0); \quad (0, 1, 0); \quad (0, 1, 1); \quad (0, 0, 1); \quad (0, 0, 0).$$

Applicare il Teorema di Stokes per calcolare

$$\int_{\overline{C}} F.$$

[1]

5.21

Utilizzare l'uguaglianza provata nel Problema 1.31 e il Teorema di Gauss della divergenza per calcolare il flusso (ascendente) del campo vettoriale

$$(x, y, z) \mapsto (z(x^2 + y^2 - 1), z(x^2 + y^2 - 1), xy); \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

attraverso il grafico della funzione

$$(x, y) \mapsto (1 + xy)^{1/2}; \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

[0]

5.22

Sia \mathcal{P} la piramide di vertici

$$(0, 0, 0); \quad (2, 0, 0); \quad (1, 1, 0); \quad (0, 1, 0); \quad (1, 1, 1).$$

Applicare a \mathcal{P} il teorema della divergenza per calcolare il flusso ascendente del campo

$$F(x, y, z) := (0, 0, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

attraverso la superficie poliedrale data dall'unione dei due triangoli di vertici rispettivamente

$$(0, 0, 0); \quad (2, 0, 0); \quad (1, 1, 1)$$

e

$$(0, 0, 0); \quad (0, 1, 0); \quad (1, 1, 1).$$

$\left[\frac{1}{2}\right]$

5.23

Sia P la piramide limitata dai tre piani cartesiani di \mathbb{R}^3 e dal piano passante per i punti

$$(1, 0, 0), \quad (0, 2, 0), \quad (0, 0, 3).$$

Determinare il flusso uscente da P del campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (xyz, xyz, xyz).$$

Usare quindi il Teorema di Gauss della divergenza per calcolare

$$\int_P (yz + xz + xy) \, dx dy dz.$$

$\left[\frac{22}{15}, \frac{22}{15}\right]$

5.24

Servirsi del teorema di Green per calcolare l'area dell'insieme E definito come la regione limitata del piano racchiusa dalle curve

$$y = 0, \quad y = x^2, \quad y = 1 - x^2.$$

$\left[\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right]$

5.25

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (x, y, z^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e la semisfera

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}.$$

Si calcoli

$$\int_E \operatorname{div} F.$$

Usando tale risultato e il teorema della divergenza, ricavare poi

$$\int_{\partial E} (x^2 + y^2 + z^3) d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

dove N indica il campo normale esterno a ∂E .

$$\left[\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}\right]$$

5.26

Si consideri il campo di vettori

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (2x, y, 1 - 2z)$$

e la superficie

$$S := \{(x, y, 1 - x^2 - y^2) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Usare il teorema della divergenza e il risultato dell'esercizio 1.41 per calcolare il flusso ascendente di F attraverso S .

$$[3\pi/2]$$

5.27

Consideriamo il campo

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (0, 0, z)$$

e il tronco di cilindro

$$\Gamma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 + y\}.$$

Calcolare il flusso ascendente di F attraverso l'ellisse

$$E := \{(x, y, 1 + y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

nei seguenti due modi:

- Mediante calcolo diretto;
- Applicando il teorema della divergenza alla regione Γ e al campo F .

$[\pi]$

5.28

Indichiamo con S_1 il grafico della funzione

$$(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{1/4}, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

e con S_2 quello di

$$(x, y) \mapsto 2 - (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

Calcolare:

- il flusso discendente del campo $(x, y, z) \mapsto (zx, zy, 0)$ attraverso S_1 ;
- (usando il Teorema della divergenza e il risultato ottenuto nell'esercizio 1.47) il flusso ascendente del campo $(x, y, z) \mapsto (zx, zy, 0)$ attraverso S_2 .

$[\pi/3; 5\pi/6]$

5.29

Consideriamo:

- il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := \left(\frac{z}{x}, x, \ln y \right);$$

- la regione piana compatta A limitata dalle rette

$$y = x, \quad y = 2x, \quad x + y = 1, \quad x + y = 2;$$

- il grafico G della funzione

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := xy.$$

Usare il Teorema di Stokes per calcolare

$$\int_{\partial G} F$$

dove per ∂G si sia scelta arbitrariamente una delle due orientazioni.

$[\pm 1/4]$

5.30

Sia S il grafico della funzione

$$[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto y$$

e sia N il campo normale a S avente la terza componente positiva. Servirsi del Teorema di Stokes per calcolare

$$\int_{\partial(S,N)} (z, x, x).$$

[1]

5.31

Siano Γ e D_z gli insiemi definiti nell'esercizio 1.52, sia N il campo normale a $\partial\Gamma$ uscente da Γ , sia $\Sigma := \partial\Gamma - (D_0 \cup D_1)$ e

$$F(x, y, z) := (x, y, -2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Calcolare

$$\int_{\Sigma} F \cdot N$$

usando il Teorema di Gauss.

[2 π]

5.32

Verificare la formula di Stokes

$$\int_{(D,N)} \operatorname{rot} F = \int_{\partial(D,N)} F$$

dove D è il disco di raggio 1 e centro $(0, 1, 1)$ incluso nel piano $y = 1$, $N := (0, 1, 0)$ e

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := (-yz, xz, xy).$$

5.33

Sia E il solido ottenuto dalla rotazione intorno all'asse z della regione compatta del piano yz delimitata dall'arco di parabola $z = y^2 - y$ con $y \geq 0$, dalla retta $z = 2$ e dall'asse z . Usare il

teorema della divergenza per calcolare il flusso uscente da E del campo vettoriale

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{y}{1+z^2}, \frac{x}{1+z^2}, (1+z^2)\sqrt{x^2+y^2} \right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

[3072 π /35]

5.34

Applicare il teorema della divergenza all'insieme

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$

e al campo di vettori

$$F(x, y, z) := (-y, x-1, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

per calcolare il flusso ascendente di F attraverso la superficie

$$\{(x, y, z) \in \partial E \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}.$$

[8 π /3]

5.35

Si consideri la parametrizzazione di curva piana

$$\gamma(t) := \left(t, \frac{\sin t}{t} \right), \quad t \in \left[\pi, \frac{\pi}{2} \right]$$

e il campo di vettori

$$F(x, y) := \left(\frac{3\pi}{2}y, \left(x - \frac{\pi}{2} \right) (\pi - x) \right), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} F$$

applicando il teorema di Green al sottografico di $t \mapsto \sin t/t$, con $t \in (\pi/2, \pi)$.

[-2]

5.36

Eseguire di nuovo il calcolo del flusso considerato nell'esercizio 1.63, stavolta direttamente (e cioè senza ricorrere al teorema della divergenza).

[0]

5.37

Siano dati il sottoinsieme compatto E del primo quadrante del piano cartesiano limitato dalle curve

$$y = x^2, \quad y = x^2 + 1, \quad y = 1, \quad y = 3.$$

e il campo di vettori

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) := (y, x^2y + x).$$

Servirsi del teorema di Green per calcolare

$$\int_{(\partial E, \tau_E)} F$$

dove τ_E è il campo vettoriale unitario che orienta positivamente ∂E .

[4]

5.38

Per $R > 0$, sia

$$E_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq R\}$$

$$S_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq R\}.$$

Inoltre si indichi con N il campo normale esterno a ∂E_R e si consideri il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := \left(\frac{xy^2}{(z+2)^2}, 0, z \right).$$

Dopo aver verificato che per ogni $(x, y, z) \in S_R$ si ha

$$\frac{x^2y^2}{(z+2)^2} = F(x, y, z) \cdot N(x, y, z)$$

applicare il teorema della divergenza per calcolare

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \frac{x^2y^2}{(z+2)^2} d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

$[\pi/8]$

5.39

Sia G il grafico della funzione

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \ni (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + 3}$$

e sia ν il campo normale a G tale che $\nu_3 > 0$. Calcolare il rotore di

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := (-y, x, x^2 z^2)$$

e usare il teorema di Stokes per provare che

$$\int_{(G, \nu)} (0, -xz^2, 1) = \pi.$$

$$[\text{rot} F(x, y, z) = (0, -2xz^2, 2)]$$

5.40

Si consideri l'insieme

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$$

e sia ν il campo di vettori normali esterni a ∂E . Applicare il teorema della divergenza per calcolare

$$\int_{(\partial E, \nu)} (\ln(1+y), (x+y)^2).$$

$$[7]$$

5.41

Data la superficie

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

sia ν il campo continuo normale a S avente la terza componente positiva. Inoltre sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito come segue

$$F(x, y, z) := (xye^z, e^{x^2+y^2}, \sin(xyz)).$$

- Calcolare $\text{rot} F$ in (x, y, z) e ν in $(x, y, x^2 + y^2) \in S$;
- Usare il teorema di Stokes per calcolare

$$\int_{(S, \nu)} \text{rot} F.$$

[rot $F(x, y, z) = (xz \cos(xyz), -yz \cos(xyz) + xye^z, 2xe^{x^2+y^2} - xe^z)$; $\nu(x, y, x^2+y^2) = (-2x, -2y, 1)/(1+4x^2+4y^2)^{1/2}$; 0]

5.42

Si considerino:

- La superficie orientata (S, ν) , dove S è il grafico della funzione

$$(x, y) \mapsto \sqrt{1-x^2}, \quad (x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1]$$

e ν è il campo normale a S avente la terza componente positiva;

- Il campo vettoriale

$$(x, y, z) \mapsto (yz, yz, yz), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Verificare che vale la formula di Stokes.

[Il valore comune dei due integrali nell'identità di Stokes è $-\pi/2$]

5.43

Si considerino:

- La superficie orientata (S, ν) , con

$$S := \{(x, y, 1) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

e

$$\nu : S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (0, 0, 1);$$

- Il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x+y, y+z, z+x).$$

Verificare che vale la formula di Stokes.

[Il valore comune dei due integrali nell'identità di Stokes è -3π]

Chapter 6

Potenziale di un campo vettoriale

6.1

Stabilire se il campo vettoriale

$$F(x, y) := \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}, -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \right)$$

è conservativo in $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y > 0\}$ e, in caso affermativo, scriverne un potenziale. Dire infine se F è conservativo nel suo dominio di esistenza $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y \neq 0\}$.

$$\left[\text{si}; \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right]$$

6.2

Si consideri il campo vettoriale piano

$$F(x, y) := (\sin(x + y) + x \cos(x + y), x \cos(x + y)).$$

Stabilire se esso è conservativo in \mathbf{R}^2 ed, eventualmente, determinarne un potenziale.

6.3

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (z, 3z, x + 3y).$$

Stabilire se esso è conservativo in \mathbf{R}^3 ed, eventualmente, determinarne un potenziale.

$$[\text{si}; z(x + 3y)]$$

6.4

Provare che il campo vettoriale

$$F(x, y) := (e^x(1 + x - y), -e^x)$$

è conservativo. Determinarne il potenziale che si annulla nell'origine.

6.5

Dimostrare che il campo

$$F(x, y) := (e^y - ye^x, xe^y - e^x)$$

soddisfa CIP. Calcolare

$$\int_C F \bullet ds$$

dove C è una curva qualsiasi avente $(0, 0)$ come punto iniziale e $(1, 1)$ come punto finale.

[0]

6.6

Sia

$$D := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi \text{ e } 0 \leq y \leq \sin x\}, \quad \bar{F}(x, y) := (x, y^2)$$

e denotiamo con C la parte di ∂D costituita dall'arco di senoide percorsa "da sinistra a destra".

- Usando il teorema di Gauss, calcolare il flusso di \bar{F} attraverso ∂D (uscende da D).
- Stabilire se il campo \bar{F} è conservativo.
- Calcolare

$$\int_C x dx + y^2 dy.$$

6.7

Dimostrare che il campo

$$F(x, y) := (e^y - ye^x, xe^y - e^x)$$

soddisfa CIP. Calcolare

$$\int_C F \bullet ds$$

dove C è una curva qualsiasi avente $(0, 0)$ come punto iniziale e $(1, 1)$ come punto finale.

6.8

Stabilire se il campo di vettori

$$F(x, y) := (-2(y+1)x^{-3}, x^{-2})$$

è conservativo. In caso affermativo, determinare un potenziale di F .

6.9

Determinare l'insieme di esistenza del campo

$$F(x, y) := \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y).$$

Stabilire se F è conservativo e, in caso affermativo, determinarne un potenziale.

6.10

Stabilire se il campo di vettori

$$F(x, y) := \left(\frac{2}{x - \frac{y}{x}}; \frac{1}{y - x^2} \right)$$

è conservativo. In caso affermativo, determinarne un potenziale.

6.11

Dimostrare che il campo di vettori

$$(x, y) \mapsto \left(\ln y - \frac{y}{x}, \frac{x}{y} - \ln x \right), \quad (x, y) \in (0, +\infty)^2$$

soddisfa CIP. Determinarne il potenziale φ tale che $\varphi(1, 1) = 0$ e verificare che $\varphi(y, x) = -\varphi(x, y)$.

6.12

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y) := \left(\frac{y^2 + xy + 1}{x + y}, \frac{x^2 + xy + 1}{x + y} \right), \quad x + y \neq 0.$$

(i) Dimostrare che F è conservativo;

(ii) Sia φ un potenziale di F e sia

$$\psi(x, y) := -\frac{x^2 + y^2}{2} + x + y, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Dire in quali punti la funzione complessa $\varphi + i\psi$ è olomorfa.

6.13

Descrivere il dominio (massimale) di esistenza del campo

$$F(x, y) := \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), -\arctan \frac{y}{x} \right).$$

Stabilire se F è conservativo. Nel caso che lo sia, se ne determini la famiglia dei potenziali.

6.14

Determinare $\varphi \in C^1(\mathbf{R}^2)$, sapendo che essa è potenziale del campo vettoriale

$$F(x, y) := (2x\varphi(x, y), \varphi(x, y))$$

e che $\varphi(0, 0) = 1$. Determinare poi

$$\int_{\bar{C}} F \bullet ds$$

dove \bar{C} è il grafico della funzione

$$x \mapsto x + \sin x, \quad x \in [0, \pi]$$

orientato di modo che $(0, 0)$ sia il punto iniziale.

6.15

Determinare un campo F con potenziale

$$\Phi(x, y) := x - 3y + x^2, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Esistono altri campi con lo stesso potenziale? Motivare la risposta. Calcolare infine

$$\int_P F$$

dove P è la poligonale congiungente, nell'ordine, i punti:

$$(0, 0), \quad (1, 1), \quad (0, 2), \quad (3, 3), \quad (0, 4), \quad (5, 5), \quad (0, 6), \quad (7, 7), \quad (0, 8).$$

[No; - 24]

6.16

Stabilire se il campo

$$F(x, y) := \frac{(y, -x)}{(y-x)^2}, \quad x \neq y$$

è conservativo. Calcolare

$$\int_{\overline{C}} F$$

dove C è il grafico della funzione

$$x \mapsto x \sin x, \quad x \in [0, 4\pi]$$

e l'orientazione è scelta di modo che l'origine sia il punto iniziale.

[Campo conservativo; 0]

6.17

Calcolare

$$\int_{\overline{S} \cup \overline{C}} F$$

dove

- \overline{S} è il segmento orientato avente $(1, 1, 0)$ come punto iniziale e $(1, 0, 0)$ come punto finale;
- \overline{C} è il quarto di circonferenza, nel piano $x = 1$, di centro $(1, 1, 0)$ e orientato in modo tale che $(1, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$ ne siano rispettivamente il punto iniziale e il punto finale;
- F è il campo vettoriale

$$(x, y, z) \mapsto \left(-\frac{y}{x^2}, \frac{1}{x}, 1 \right).$$

[1 (un potenziale è dato da $\frac{y}{x} + z$)]

6.18

Considerato il campo di vettori

$$F(x, y) := \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y+\alpha}{1+x^2+y^2} \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

determinare un valore di α per cui si abbia

$$\int_C F = 0$$

per ogni circonferenza C centrata nell'origine e percorsa in senso orario.

[0]

6.19

Stabilire per quali valori di α il campo

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{\alpha + (1 - \alpha)x}{x + e^{-y}}, \frac{1 - \alpha + \alpha x}{x + e^{-y}} \right)$$

risulta conservativo nel primo quadrante del piano cartesiano.

[1]

6.20

Si consideri il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) := (2x|y|, x^2).$$

- Determinare un potenziale di F in $(0, +\infty)^2$;
- Stabilire (motivando la risposta) se esiste un potenziale di F in $(0, +\infty) \times (0, -\infty)$;
- Stabilire (motivando la risposta) se esiste un potenziale di F di classe C^2 in un insieme aperto contenente almeno un punto della retta $y = 0$.

$[x^2y; \text{non esiste}; \text{non esiste}]$

Chapter 7

Analisi complessa

7.1

Data la funzione complessa

$$f(z) := \frac{e^z}{z^2 - i},$$

determinarne il campo di esistenza. Stabilire poi dove f è derivabile e calcolare $f'(z)$ nei punti dove esiste.

7.2

Dire se la funzione

$$f(z) := \bar{z} = x - iy$$

ha una primitiva. Calcolare

$$\int_C f(z) dz$$

dove C è il segmento che congiunge 0 a $1 + i$, orientato in modo che 0 ne sia il punto iniziale.

7.3

Calcolare

$$\int_C \frac{\sin z}{(z - 2i - 1)^5} dz$$

nei seguenti casi:

- C è la circonferenza di raggio 4 e centro l'origine, percorsa in senso antiorario;

- C è il bordo del rettangolo avente per diagonale il segmento di estremi 0 e $2 + i$, percorso in senso antiorario.

7.4

Sia data la funzione complessa

$$f(z) := \frac{1}{z - i}.$$

- Esiste un semipiano nel quale f ha una primitiva?
- In caso affermativo, determinare una di tali primitive.

7.5

Calcolare

$$\int_C f(z) dz$$

dove f è la funzione dell'esercizio 7.4, mentre C è la circonferenza di raggio 2 e centro i , percorsa in senso antiorario.

7.6

Verificare che

$$u(x, y) := \frac{x}{x^2 + y^2}$$

è armonica in $\mathbf{C} \setminus \{(0, 0)\}$. Determinare una funzione armonica coniugata di u .

7.7

Si considerino le curve

$$C_1 := \{(x, 0) \mid x \in [-2, 2]\}, \quad C_2 := \{(x, y) \mid y \geq 0, x^2 + y^2 = 4\}$$

orientate in modo che $(-2, 0)$ è il punto iniziale di C_1 , mentre $(2, 0)$ è il punto iniziale di C_2 . Calcolare

$$\int_{C_1} \frac{2}{z - i} dz, \quad \int_{C_1 \cup C_2} \frac{2}{z - i} dz$$

(per quest'ultimo usare la formula di Cauchy) e servirsi dei risultati così ottenuti per ricavare

$$\int_{C_2} \frac{2}{z-i} dz.$$

7.8

Servirsi delle condizioni di Cauchy-Riemann per verificare che l'integrale

$$\int_C z e^z dz$$

dove C è una qualsiasi curva orientata nel piano complesso, non dipende completamente da C ma solo dai suoi punti estremi. Calcolare tale integrale nel caso che C abbia $(0, 0)$ come punto iniziale e $(1, 1)$ come punto finale.

7.9

Si consideri la funzione $u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$u(x, y) := x^2 - y^2 - x.$$

Verificare che u è armonica. Trovare una funzione olomorfa avente u come parte reale.

7.10

Si consideri la funzione complessa di variabile complessa

$$f(z) := f(x + iy) := x^2 + i 2xy.$$

Risolvere le seguenti questioni:

- Stabilire se f è olomorfa in \mathbf{C} .
- Indicato con C il segmento congiungente $(0, 0)$ con $(2, 1)$, si calcoli

$$\int_C f(z) dz.$$

- Determinare una funzione reale $\varphi(y)$ in modo che

$$g(z) := f(x + iy) + \varphi(y) = x^2 + \varphi(y) + i 2xy$$

sia olomorfa in \mathbf{C} .

7.11

Determinare due numeri reali a e b di modo che la funzione

$$f(z) = f(x, y) = x^3 + axy^2 + i(bx^2y - y^3)$$

sia derivabile in \mathbf{C} . Calcolare poi $f'(z)$.

7.12

Si considerino le due poligonali C_1 e C_2 con lati paralleli agli assi e congiungenti l'origine al punto $(x, y) \in \mathbf{C}$. Si calcolino gli integrali

$$I_1 := \int_{C_1} f(z) dz, \quad I_2 := \int_{C_2} f(z) dz$$

dove f è la funzione definita nell'esercizio 7.11. Trovare a e b tali che $I_1 = I_2$.

Facoltativo: individuare e argomentare la relazione fra le conclusioni di questo esercizio e dell'esercizio 7.11.

7.13

Data la funzione complessa

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2x + 2i(x+1)y$$

si calcoli

$$\int_C f(z) dz$$

dove C è il segmento che conduce dall'origine al punto $(1, 1)$. Infine, si verifichi che f soddisfa $\text{CIP}_{\mathbf{C}}$.

7.14

Data la funzione

$$u(x, y) := x^2 - y^2 - 2x,$$

si determini una nuova funzione $v(x, y)$ tale che $u + iv$ sia analitica in \mathbf{C} .

7.15

Si consideri la funzione complessa

$$f(z) := \frac{z}{z-i}.$$

Stabilire (motivando le risposte):

- In quali punti di \mathbf{C} la funzione f è derivabile.
- Se esiste una primitiva di f in $\mathbf{C} \setminus \{i\}$.

7.16

Data la funzione

$$f(z) := x^2 - y^2 - x - iy(1 - 2x), \quad z = x + iy \in \mathbf{C}$$

affrontare le seguenti questioni.

- Dimostrare che f soddisfa CIP;
- Si scelga una curva C congiungente 0 a $2 + i$ e si calcoli quindi $\int_C f(z)dz$;
- Verificare che il Teorema fondamentale del calcolo in \mathbf{C} produce lo stesso risultato a cui si è pervenuti nel punto precedente.

7.17

Calcolare

$$\int_C ze^z dz$$

dove C è la semicirconferenza $\{(x, y) \in \mathbf{C} \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$, percorsa in senso antiorario.

7.18

Determinare $f(y)$ tale che $f(0) = f'(0) = 0$ e

$$u(x, y) := f(y) - x^2y$$

sia armonica. In seguito, determinare una funzione armonica coniugata ad u .

7.19

Data la curva piana

$$C := \{x + iy \mid y = 1 + x, -1 \leq x \leq 0\} \cup \{x + iy \mid y = 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}$$

calcolare

$$\int_C e^{iz} z^2 dz$$

con entrambi i versi di percorrenza possibili per C .

7.20

Verificare che la funzione

$$u(x, y) := e^{2x}(2 \cos^2 y - 1), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

è armonica. Usare gli integrali curvilinei per determinare la funzione armonica ad essa coniugata e nulla nell'origine.

7.21

Studiare la derivabilità della funzione complessa

$$f(z) = f(x, y) := e^{y+ix}, \quad (x, y) \in \mathbf{C}.$$

Determinare l'integrale

$$\int_C f(z) dz$$

dove C indica il segmento avente i e $1 + i$ come punti iniziale e finale, rispettivamente.

[f non è derivabile in nessun punto; $e \sin 1 + i e(1 - \cos 1)$]

7.22

Studiare la derivabilità della funzione complessa

$$f(x, y) := x^4 - y^3 + ix^2y, \quad (x, y) \in \mathbf{C}.$$

Calcolare poi l'integrale di f lungo l'arco di parabola $y = x^2$, avente $(0, 0)$ come punto iniziale e $(1, 1)$ come punto finale.

[f è derivabile in $(0, 0), (1/4, 0), (1/4, 1/6)$; f' vale rispettivamente $0, 1/16, 1/16+i/12$; l'integrale vale $-29/105 + 17i/60$.]

7.23

Determinare un valore di a per il quale la funzione

$$u(x, y) := e^{ax} \cos y \sin y, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

è armonica. Ricavare in seguito una funzione armonica coniugata di u .

$$\left[-\frac{1}{2}e^{2x} \cos(2y)\right]$$

7.24

Sia C_α la curva congiungente $(0, 0)$ a $(1, 1)$, definita come il grafico della funzione

$$t \mapsto t^\alpha, \quad t \in [0, 1]$$

dove $\alpha > 0$. Si consideri inoltre la funzione complessa

$$f(z) = f(x, y) := x^2 - y^2 + ax + i2y(x - 1).$$

Determinare un valore di a per il quale l'integrale

$$\int_{C_\alpha} f(z) dz$$

risulta non dipendere da α .

$$[-2]$$

7.25

Determinare la funzione g tale che

$$u(x, y) := x^2 + g(y) - 4x + 1$$

risulti armonica e soddisfi

$$g(0) = g'(0) = 0.$$

Ricavare in seguito una funzione armonica coniugata di u .

$$[2xy - 4y]$$

7.26

Verificare che la funzione

$$v(x, y) := e^x(x \cos y - y \sin y), \quad (x, y) \in \mathbf{C}$$

è armonica. Determinare poi $u : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ tale che $u + iv$ sia derivabile.

$$[-e^x(x \sin y + y \cos y)]$$

7.27

Scegliere α affinché la funzione complessa

$$f : z = x + iy \mapsto \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2) + i\frac{y}{x}$$

sia derivabile in $1 + i$. Per tale α , determinare tutti i punti in cui f è derivabile. Infine, posto $\alpha := 2$, calcolare

$$\int_{\bar{S}} f(z) dz$$

dove \bar{S} è il segmento orientato di punto iniziale 1 e punto finale $1 + i$.

$$[-\frac{1}{2} + i\frac{4}{3}]$$

7.28

Determinare l'insieme dei punti in cui la funzione complessa

$$x + iy \mapsto 2xy + i(x - y + x^2)$$

è derivabile.

$$[-\frac{1}{4} - i\frac{1}{2}]$$

7.29

Calcolare

$$\int_{\bar{C}} \bar{z} dz$$

dove C è l'arco ottenuto intersecando la circonferenza di raggio 1 centrata in $(0, 1)$ con il primo quadrante del piano cartesiano e l'orientazione è quella positiva.

$$[2 + i\pi]$$

7.30

Calcolare

$$\int_{\overline{S} \cup \overline{C}} F$$

dove

- \overline{S} è il segmento orientato avente $(1, 1, 0)$ come punto iniziale e $(1, 0, 0)$ come punto finale;
- \overline{C} è il quarto di circonferenza, nel piano $x = 1$, di centro $(1, 1, 0)$ e orientato in modo tale che $(1, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$ ne siano rispettivamente il punto iniziale e il punto finale;
- F è il campo vettoriale

$$(x, y, z) \mapsto \left(-\frac{y}{x^2}, \frac{1}{x}, 1 \right).$$

$[D = (0, +\infty)^2 \cup (-\infty, 0)^2]$; la funzione è derivabile in $(1, 1)$ e in $(-1, -1)$

7.31

Per ogni numero reale a , sia D_a l'insieme dei punti in cui la funzione complessa $x + iy \mapsto xy + i(ax^2 + y)$ è derivabile. Determinare D_0 e $D_{-1/2}$.

$$[D_0 = \{i\}; D_{-1/2} = \{x + i \mid x \in \mathbf{R}\}]$$

7.32

Sia T il triangolo di vertici $-1, 1, i$. Provare che la funzione

$$w \mapsto \int_{\partial T} \frac{3z^2 - z + 2}{(z - w)^3} dz$$

è costante all'interno di T .

$$[6\pi i]$$

7.33

Calcolare

$$\int_C e^{x-iy} dz$$

dove C è il segmento congiungente 0 (punto iniziale) a $1 + i$.

$$[i(e^{1-i} - 1)]$$

7.34

Provare che la funzione complessa

$$(x, y) \mapsto \frac{\ln(1+x)}{y} + i(x^2 - y^2) \quad (x > -1, y \neq 0)$$

non è derivabile in alcun punto dell'asse $x = 0$.

$$[\text{Le condizioni di C-R in } (0, y) \text{ si riducono a } y^2 = -1]$$

7.35

Determinare i punti del primo quadrante in cui la funzione complessa

$$x + iy \mapsto \frac{x}{x + e^{-y}} + i \frac{1}{x + e^{-y}}$$

è derivabile.

$$[\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 1, y = \ln x\}]$$

7.36

Determinare

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

tali che la funzione complessa

$$2x^3 + \alpha xy^2 + x^2 - y^2 - x - \alpha + 1 + iv(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{C}$$

è derivabile in \mathbb{C} .

$$[\alpha = -6; v(x, y) = 2xy + 6x^2y - 2y^3]$$

7.37

Si consideri la famiglia di funzioni complesse di variabile complessa

$$f_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z = x + iy \mapsto (\alpha + i)x - y$$

parametrizzata da $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare i valori del parametro α per cui è nullo l'integrale di f_α lungo la circonferenza unitaria centrata nell'origine. Verificare che per tali valori di α la funzione f_α è derivabile in \mathbb{C} .

[0]

7.38

Discutere l'esistenza di primitive della funzione

$$f_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_\alpha(x, y) := x^2 - y^2 + i\alpha xy$$

al variare di α in \mathbb{R} .

[Esiste primitiva se e solo se $\alpha = 2$]

7.39

Provare che una funzione complessa della forma $(x, y) \mapsto u(x, y) + iu(x, y)$ è derivabile se e solo se u è costante su ogni componente connessa del dominio.

7.40

Provare che la funzione complessa

$$(x, y) \mapsto \ln(1 + xy) + ixy$$

è derivabile soltanto in $(0, 0)$.

7.41

Supponiamo che la parte reale di una funzione complessa derivabile in \mathbb{C} sia della forma

$$(x, y) \mapsto y \int_0^x g(t) dt$$

dove $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile. Provare allora che g è costante.

7.42

Provare che la seguente funzione complessa

$$(x, y) \mapsto \frac{(x + iy)(\cos y - i \sin y)}{e^x}, \quad (x, y) \in \mathbb{C}$$

è dotata di primitiva.

7.43

Provare che se $u + iv$ è una funzione derivabile in \mathbb{C} allora vale l'uguaglianza

$$\operatorname{div}(u\nabla v) = 0.$$

7.44

Calcolare

$$\int_C \frac{z^2 e^z}{8z + 9i} dz$$

dove C è la circonferenza unitaria centrata nell'origine, percorsa in senso antiorario.

[0]

7.45

Stabilire in quali punti la funzione complessa

$$x + iy \mapsto \frac{x}{y} + iy$$

è derivabile. Calcolare il valore della derivata in questi punti.

[$\{i\}; 1$]

7.46

Si considerino la funzione complessa

$$f(x, y) := xy + i \frac{(x+y)^2}{2}, \quad x + iy \in \mathbb{C}$$

e il segmento orientato \overline{C} avente $(0, 0)$ come punto iniziale e $(1, 0)$ come punto finale. Determinare:

- i punti in cui f è derivabile;
- l'integrale

$$\int_{\overline{C}} f(z) dz.$$

$$[\{(0, 0)\}; \frac{i}{6}]$$

7.47

Determinare i punti in cui la funzione complessa

$$x + iy \mapsto x \cos y (1 + i \sin y), \quad x + iy \in \mathbb{C}$$

è derivabile.

$$[\{((-1)^k, k\pi), (0, k\pi + \pi/2) \mid k \in \mathbb{Z}\}]$$

7.48

Sia $\Omega := (0, +\infty)^2$ e

$$u(x, y) := x + \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Verificare che u è una funzione armonica. Determinare $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $u + iv$ sia derivabile in Ω .

$$\left[u(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right]$$

7.49

Sia u la parte reale di una funzione complessa derivabile nel sottoinsieme aperto Ω di \mathbf{C} e sia E un sottoinsieme compatto di Ω con frontiera regolare a tratti. Provare che allora

$$\int_{\partial E} u \nabla u = 0.$$

7.50

Sia

$$f(w) := \int_{[0;w]} (z-w)^2 dz, \quad (w \in \mathbf{C}).$$

Verificare che f è derivabile in \mathbf{C} e calcolare f' .

$$[f'(w) = w^2]$$

7.51

Provare che la funzione complessa

$$x + iy \mapsto xe^{ix}$$

non è derivabile in alcun punto.

7.52

Calcolare l'integrale complesso

$$\int_C 1 + i\sqrt{1-y^2} dz$$

dove C è il grafico della funzione \sin su $[-\pi/2, \pi/2]$, orientato di modo che $(-\pi/2, -1)$ ne sia il punto iniziale.

$$[\pi/2 + i4]$$

7.53

Provare che la funzione

$$u(x, y) := \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$$

è armonica. Determinare poi una funzione armonica coniugata di u .

$$\left[\frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2)^2} \right]$$

7.54

Sia $\bar{\Gamma}$ la curva orientata (spirale) parametrizzata dalla mappa

$$t \mapsto i + te^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Calcolare

$$\int_{\bar{\Gamma}} \frac{1}{z^2} dz.$$

$$\left[\frac{-2\pi}{1+4\pi^2} + i \frac{-4\pi^2}{1+4\pi^2} \right]$$

7.55

determinare $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che la funzione

$$f(x, y) := \varphi(y) \sin x + i\psi(x)e^y, \quad (x, y) \in \mathbb{C}$$

sia derivabile.

$$[\psi(x) = \cos x, \varphi(y) = e^y]$$

7.56

Determinare una funzione liscia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che la funzione complessa

$$x + iy \mapsto x^3 - yf(x, y) + i[xf(x, y) - y^3]$$

sia derivabile in \mathbb{C} .

$$[3xy]$$

7.57

Usare il Teorema di rappresentazione integrale di Cauchy per calcolare

$$\int_C \frac{z}{z-i} dz$$

dove C è la semicirconferenza parametrizzata da

$$\gamma(t) := 2(\cos t, \sin t), \quad t \in [0, \pi].$$

[4 - 2 arctg 2]

7.58

Sia

$$f(w) := \int_{[0;w]} \bar{z} dz, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Determinare i punti in cui f è derivabile.

[$f(w) = |w|^2/2$; f è derivabile solo in 0]

7.59

Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $x + iy \mapsto ax + by + x + y + i(ax + by)$ risulti derivabile in \mathbb{C} .

[$a = -1, b = 0$]

7.60

Sia

$$u(x, y) := e^x(x \cos y - y \sin y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Provare che esiste una funzione $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $u + iv$ è derivabile in \mathbb{C} . Determinare un'espressione esplicita del campo normale N al grafico di v tale che $N_3 > 0$.

7.61

Siano dati un sottoinsieme aperto Ω di \mathbb{R}^2 e due funzioni $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Provare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) u e v sono costanti in ogni componente connessa di Ω ;
- (ii) $u + iv$ e $v + iu$ sono derivabili.

7.62

Sia C un sottoinsieme compatto di \mathbb{R}^2 , chiusura di un aperto A la cui frontiera ha misura nulla e siano $u, v : C \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

- (i) la mappa $\Phi := (u, v) : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ soddisfa le ipotesi del teorema del cambiamento della variabile nell'integrale;
- (ii) $u + iv$ è derivabile in A .

Provare che

$$m_2(\Phi(A)) = \frac{1}{2} \int_A (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2).$$

7.63

Per ogni $w \in \mathbb{C}$, sia f_w la funzione complessa definita come segue:

$$f_w(x, y) := wy - w^2x, \quad (x, y) \in \mathbb{C}.$$

Provare che f_w è derivabile in \mathbb{C} se e soltanto se $w = 0$ oppure $w = i$.

7.64

Determinare

$$\int_{\bar{C}} z^3 dz$$

dove \bar{C} è l'arco di parabola parametrizzato da

$$\gamma(t) := t(2-t) + it, \quad t \in [0, 2].$$

[4]

7.65

Descrivere la famiglia delle funzioni $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$u(x, y) := x^2 - 2x - p(y). \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

sia una funzione armonica in \mathbb{R}^2 . Data una p siffatta, determinare le funzioni armoniche coniugate di u che valgono zero nell'origine.

[$p(y) = y^2 + ay + b$, $v(x, y) = 2xy - 2y + ax$ (con $a, b \in \mathbb{R}$)]

7.66

Determinare $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ tale che la funzione

$$u(x, y) := y\varphi(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

sia armonica e soddisfi $u(1, 1) = 2$, $u(0, 1) = 0$. Determinare un'armonica v coniugata di u .

$$[\varphi(x, y) = 2x, v(x, y) = y^2 - x^2]$$

7.67

Determinare una funzione derivabile $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che la funzione complessa

$$z = x + iy \mapsto f(z) := x^3 - x\varphi(y) + i(y\varphi(x) - y^3)$$

risulti derivabile in ogni punto di \mathbb{C} . Calcolare poi

$$\int_{\overline{C}} f(z) dz$$

dove \overline{C} è l'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ con $x, y \geq 0$, orientata in senso antiorario.

$$[\varphi(t) = 3t^2, 0]$$

7.68

Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, la derivabilità della funzione $F_\alpha : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ definita da

$$F_\alpha(w) := \int_{[0;w]} f_\alpha(z) dz \quad (w \in \mathbf{C})$$

dove $[0; w]$ è il segmento orientato congiungente 0 (punto iniziale) e w , mentre $f_\alpha(z) = f_\alpha(x + iy) := x + i\alpha y$.

[Se D_α indica l'insieme dei punti in cui F_α è derivabile, si ha: $D_1 = \mathbf{C}$ e $D_\alpha = \{0\}$ per ogni $\alpha \neq 1$].

7.69

Studiare, per $\rho \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ e $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, la funzione complessa

$$\varphi(\rho, k) := \int_{C_\rho} \frac{(z+i)^2}{(z-i)^k} dz$$

dove C_ρ è la circonferenza di raggio ρ centrata nell'origine, percorsa in senso antiorario.

$[\varphi = 0$ su $(0, 1) \times \{1, 2, \dots\}$; $\varphi = 0$ su $(1, +\infty) \times \{4, 5, \dots\}$; inoltre, per $\rho > 1$: $\varphi(\rho, 1) = -8\pi i$,
 $\varphi(\rho, 2) = -8\pi$, $\varphi(\rho, 3) = 2\pi i$]

7.70

Descrivere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme D_α dei punti in cui la funzione complessa

$$\mathbb{C} \ni x + iy \mapsto \alpha xy + i(\alpha x^2 - y^2)$$

è derivabile. Calcolare l'integrale complesso di tale funzione sul segmento che congiunge l'origine (punto iniziale) e $2 + i$.

$[D_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$, $D_{-2} = \{0\} \times \mathbb{R}$, $D_\alpha = \{(0, 0)\}$ se $\alpha \neq 0, -2$; $\frac{1}{3} + \frac{10\alpha-2}{3}i$]

Chapter 8

Formula di Taylor, massimi e minimi di funzione

8.1

Trovare (dopo averne motivato l'esistenza) il minimo della funzione

$$f(x, y, z) := \frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2$$

soggetta al vincolo

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 4x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

8.2

Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) := xy(x^2 + y^2 - 2x)$$

e si affrontino le seguenti questioni:

- determinare e classificare i punti critici di f ;
- dire se esistono il massimo ed il minimo assoluti di f nel disco chiuso di raggio 3 centrato nell'origine e, in caso affermativo, ricavarli;
- dire se esistono il massimo ed il minimo assoluti di f in \mathbf{R}^2 e, in caso affermativo, ricavarli;
- si può ricondurre la particolare simmetria dell'insieme dei punti critici a qualche simmetria di f ?

8.3

Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) := x^2y - (x + y)^2$$

e classificare quelli diversi da $(0, 0)$.

8.4

Determinare gli estremi locali e globali della funzione

$$f(x, y) := x^3 + xy^2 - 2xy$$

nell'insieme $D := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2x - x^2\}$.

8.5

Classificare gli eventuali punti critici della funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) := (x + y^2)e^x.$$

Dire se f ha massimo assoluto. Determinare il minimo assoluto di f nel disco chiuso di raggio 1 centrato in $(0, 0)$.

8.6

Sia C il cono di equazione

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Determinare esplicitamente la distanza $d(x, y)$ del punto $(1, 1, 0)$ dal punto di C avente $(x, y, 0)$ come ombra.
- Verificare che il grafico della funzione

$$f(x, y) := d^2(x, y)$$

è convesso in ogni suo punto.

- Dimostrare che f ha un unico punto stazionario $P_0(x_0, y_0)$ e che questo è di minimo assoluto.
- Verificare che il vettore

$$(1, 1, 0) - (x_0, y_0, \sqrt{x_0^2 + y_0^2})$$

è perpendicolare a C nel punto $(x_0, y_0, \sqrt{x_0^2 + y_0^2})$.

8.7

Data la funzione

$$f(x, y) = \ln(2 + xy)$$

se ne scriva il polinomio di Taylor del secondo ordine con “punto iniziale” in $(0, 0)$. Studiare la forma del grafico di f nel punto $(0, 0, \ln 2)$.

8.8

Stabilire se la funzione

$$f(x, y) := x^2 + 6xy + 2y^2$$

ammette massimo e minimo assoluti sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine. In caso affermativo, determinarne i valori.

8.9

Studiare i massimi e minimi, relativi e assoluti, della funzione

$$f(x, y) := \ln(1 + xy)$$

nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$.

8.10

Data la funzione

$$f(x, y) := e^{y-2x},$$

scrivere l'equazione del piano tangente al grafico G di f nel punto $(1, 2, 1)$. Descrivere infine la forma di G nello stesso punto (convesso, concavo, a sella).

8.11

Studiare i massimi e i minimi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy$$

ristretta all'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq x < 1\}.$$

8.12

Dimostrare che la funzione

$$f(x, y) := \frac{x^2 - 3y^2 + 8xy}{2 - x^2 - y^2}$$

ammette massimo e minimo assoluti sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine e quindi determinarne i valori.

8.13

Data la funzione

$$f(x, y) := \sin(xy + x^3 + y^3), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

determinare la forma del grafico di f nel punto $(0, 0, 0)$.

8.14

Data la funzione

$$f(x, y) := \ln(1 + x^2 + y^2), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

scrivere l'espressione del polinomio di Taylor di secondo grado con "punto iniziale" in $(1, 1)$. Calcolare il valore di tale polinomio in $(0, 0)$.

8.15

Considerata la funzione

$$(x, y) \mapsto f(x, y) := \frac{x^2 + 2xy + y^2}{1 + x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

verificare che si ha

$$\min_{S^1} f + \max_{S^1} f = 1.$$

8.16

Scrivere la formula di Taylor della funzione

$$f(x, y) := \cos(x + y^3 + y + x^5 y^2), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

nel punto $(0, 0)$ e stabilire in tal punto la forma del grafico di f .

Chapter 9

Serie di Fourier, spazi L^p

9.1

Sia $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ definita come segue:

$$f(x) := \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 1 & \text{se } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

- Scrivere l'espressione dei coefficienti $\alpha_k[f]$, relativi allo sviluppo in serie di Fourier di soli coseni.
- Descrivere la convergenza di $F_c[f]$ e disegnare il grafico di quest'ultima.
- Dare un esempio di intervallo sul quale $F_c[f]$ converge uniformemente.

9.2

Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{se } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Scrivere l'espressione dei coefficienti di Fourier $\beta_k[f]$, relativi alla serie di soli seni. Discutere la convergenza puntuale della serie stessa e, infine, dare un esempio di intervallo sul quale la convergenza è uniforme.

9.3

Data la funzione

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 1 & \text{se } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

scrivere la serie di Fourier di soli seni e dire come questa converge alla funzione stessa.

9.4

Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ x & \text{se } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Determinarne poi la serie di Fourier e dire come questa converge alla funzione stessa.

9.5

Scrivere la serie di Fourier di soli seni relativa alla funzione coseno e discuterne la convergenza.

9.6

Sia data la funzione

$$f : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := \pi - x.$$

Determinare l'espressione dei coefficienti di Fourier $\alpha_k[f]$, relativi alla serie di soli coseni e discutere la convergenza della serie stessa.

9.7

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione 2π -periodica tale che

$$f(x) = \begin{cases} -\pi + x & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ \pi + x & \text{se } x \in [0, \pi). \end{cases}$$

Scrivere la serie di Fourier di f e discuterne la convergenza.

$$[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)]$$

9.8

Si considerino le due funzioni 2π -periodiche $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- Stabilire se f e g siano o meno regolari a tratti;
- Elencare le proprietà relative alla convergenza delle serie di Fourier di f e di g , in base a quanto stabilito nel punto precedente e alla teoria della serie di Fourier svolta nel corso.

[f non è r.a.t.; g è r.a.t.; (siano Σ_f e Σ_g , risp. la serie di F. di f e la serie di F. di g) Σ_g converge totalmente in $L^\infty(\mathbb{R})$ (quindi anche uniformemente, puntualmente, in $L^2(-\pi, \pi)$); Σ_f converge in $L^2(-\pi, \pi)$ a $f|_{(-\pi, \pi)}$; Σ_f converge puntualmente q.o. a f]

9.9

Scrivere la serie di Fourier di soli seni relativa alla funzione

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, \pi/2) \\ 0 & \text{se } x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

e descriverne le proprietà di convergenza.

[$b_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k}$, $b_{2k+1} = \frac{2(-1)^k}{(2k+1)^2\pi}$; La serie di Fourier di f converge a f in L^2 e puntualmente ovunque. Indicando con $S(x)$ la somma della serie in x , si ha: $S(x) = x$ se $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $S(x) = 0$ se $x \in [-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$, $S(-\pi/2) = -\pi/4$, $S(\pi/2) = \pi/4$.]

9.10

Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni 2π -periodiche tali che:

- La funzione f è pari e $f(t) = t^{3/4}$ per ogni $t \in [0, \pi]$;
- La funzione g è dispari e $g(t) = t^{-1/4}$ per ogni $t \in [0, \pi]$.

Verificare che $g \in L^2(-\pi, \pi)$. Inoltre, indicati con a_n i coefficienti della serie di Fourier di f (soli coseni!) e con b_n i coefficienti della serie di Fourier di g (soli seni!), provare che vale l'identità

$$a_n = -\frac{3}{4n}b_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

9.11

In riferimento alla serie di Fourier della funzione

$$f(x) := \begin{cases} \sin x & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ \cos x & \text{se } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

calcolarne i coefficienti a_n (per $n \geq 0$) e descriverne la convergenza.

[$a_0 = -2/\pi$; $a_1 = 1/2$; $a_n = 2/(n^2 - 1)\pi$ se $n \geq 2$ è pari; $a_n = 0$ se $n \geq 2$ è dispari.]

9.12

Provare che:

- Non esistono polinomi di primo grado propri (i.e. $bx + c$ con $b \neq 0$) ortogonali alla funzione $\sin x$ in $L^2(-\pi, \pi)$;
- Un polinomio di secondo grado proprio (i.e. $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$) è ortogonale alla funzione $\sin x$ in $L^2(-\pi, \pi)$ se e solo se $b = 0$.

Infine:

- Determinare gli elementi della famiglia $\{\cos^k x, \sin^k x\}_{k=1}^{+\infty}$ che sono ortogonali alla funzione $\sin x$ in $L^2(-\pi, \pi)$.

[Ultimo punto: Gli elementi della famiglia assegnata sono tutti ortogonali a $\sin x$, eccetto le funzioni $\sin^k x$ con k dispari]

9.13

Descrivere la convergenza della serie di Fourier della funzione 2π -periodica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

[Convergenza puntuale: a $f(x)$ se $x \neq k\pi$, a $3/2$ se $x = 2k\pi$, a 1 se $x = (2k+1)\pi$. Inoltre la serie di Fourier converge in $L^2(-\pi, \pi)$ e non converge in $L^\infty(\mathbf{R})$.]