Analisi Matematica 2 (recupero)

* * *

Prova scritta del 20 giugno 2017

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Relativamente alla serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n+1} n\, y^n \tag{1}$$

si ha

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1+(-1)^n}{n+1} n \right|^{1/n} = 1$$

da cui ricaviamo il raggio di convergenza $R = 1/\rho = 1$. Inoltre tale serie di potenze non converge per $y = \pm 1$ (poiché in entrambi i casi l'addendo della serie numerica corrispondente non è infinitesimo). L'insieme di convergenza puntuale di (1) è dunque l'intervallo $(-1, 1)$. Di conseguenza l'insieme di convergenza puntuale della serie di funzioni assegnata è

$$D := \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Poiché (1) converge totalmente (in L^∞) negli intervalli del tipo $[-r, r]$ con $r \in (0, 1)$, la serie assegnata converge totalmente (in L^∞) negli insiemi del tipo

$$\sin^{-1}([-r, r]) = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \in [-r, r]\}, \text{ con } r \in (0, 1).$$

Ciò equivale a dire che la serie assegnata converge totalmente (in L^∞) negli insiemi del tipo

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{2} + k\pi - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + k\pi + \varepsilon\right], \text{ con } \varepsilon > 0.$$

Esercizio 2

L'insieme T è compatto e la funzione f è di classe C^∞ (quindi è anche continua). Per il teorema di Weierstrass, f ha massimo e minimo (assoluti).

Osserviamo che T è il triangolo rettangolo di vertici

$$V := (0,0), \quad V' := (2,0), \quad V'' := (0,4)$$

e che perciò i suoi lati sono parametrizzati rispettivamente da

- $\alpha(t) := (t,0)$, con $t \in [0,2]$ (cateto orizzontale);
- $\beta(t) := (0,t)$, con $t \in [0,4]$ (cateto verticale);
- $\gamma(t) := (t, 4-2t)$, con $t \in [0,2]$ (ipotenusa).

I punti di massimo e di minimo appartengono all'insieme

$$I := A \cup B \cup C \cup D \cup \{V, V', V''\}$$

dove:

$$\begin{aligned} A &:= \{\alpha(t) \,|\, t \in (0,2),\, (f \circ \alpha)'(t) = 0\} \\ B &:= \{\beta(t) \,|\, t \in (0,4),\, (f \circ \beta)'(t) = 0\} \\ C &:= \{\gamma(t) \,|\, t \in (0,2),\, (f \circ \gamma)'(t) = 0\} \\ D &:= \{(x,y) \in \mathrm{int}(T) \,|\, \nabla f(x,y) = (0,0)\}. \end{aligned}$$

Poiché

$$(f \circ \alpha)(t) = t^2 + 2t, \quad (f \circ \beta)(t) = t^2 - 2t, \quad (f \circ \gamma)(t) = 5t^2 - 10t + 8$$

si ha

$$(f \circ \alpha)'(t) = 2(t+1), \quad (f \circ \beta)'(t) = 2(t-1), \quad (f \circ \gamma)'(t) = 10(t-1).$$

Inoltre

$$\nabla f(x,y) = (2x+2, 2y-2).$$

Quindi

$$A = \emptyset, \quad B = \{\beta(1)\} = \{(0,1)\}, \quad C = \{\gamma(1)\} = \{(1,2)\}, \quad D = \emptyset.$$

Abbiamo così provato che

$$I = \{(0,0); (2,0); (0,4); (0,1); (1,2)\}.$$

I valori della funzione in tali punti sono

$$f(0,0) = 0, \quad f(2,0) = 8, \quad f(0,4) = 8, \quad f(0,1) = -1, \quad f(1,2) = 3.$$

Se ne conclude che:

- Il massimo assoluto di f è 8, che viene conseguito in $(2,0)$ e in $(0,4)$;
- Il minimo assoluto di f è -1, che viene conseguito in $(0,1)$.

Esercizio 3

Il problema equivale a

$$\begin{cases} y'(x) = F(x, y(x)) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

dove

$$F(x,y) := 1 + \frac{2x}{1+x^2}y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Osserviamo che:

- $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e quindi F è continua e localmente y-Lipschitziana in ogni punto di $\mathbb{R}^2$;
- Poiché $|2x| \leq 1 + x^2$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$), si ha

$$|F(x,y)| = \left|1 + \frac{2x}{1+x^2}y\right| \leq 1 + \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| |y| \leq 1 + |y|$$

  per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Da queste due osservazioni e da uno dei teoremi esposti durante le lezioni segue subito che il dominio della soluzione massimale è $\mathbb{R}$.

Per risolvere esplicitamente l'equazione osserviamo che

$$-\frac{2x}{1+x^2} = D[-\ln(1+x^2)]$$

e quindi possiamo usare come fattore integrante la funzione

$$e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Moltiplicando l'equazione per tale fattore, otteniamo

$$\frac{1}{1+x^2}\,y'(x) - \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,y(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

cioè

$$D\left(\frac{y(x)}{1+x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Da tale identità si ottiene subito la soluzione generale

$$y(x) = (1+x^2)(c + \arctan x), \quad x \in \mathbb{R}$$

con $c \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione $y(0) = 0$, si ottiene $c = 0$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy assegnato è $y(x) = (1+x^2)\arctan x$.