Analisi Matematica 2 (recupero)

* * *

Prova scritta del 18 luglio 2017

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

- (Raggio di convergenza) Poniamo
$$a_n := \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad (n \geq 1).$$
Allora si ha
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \times \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \times \frac{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}}{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$$
da cui si ottiene subito il raggio di convergenza:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$
- (Convergenza in -1) Per $x = -1$ la serie diventa
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n.$$
Poiché la successione $\{a_n\}$ è ovviamente decrescente e infinitesina, tale serie numerica converge per il teorema di Leibniz.
- (Convergenza in 1) Per $x = 1$ la serie diventa
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$
Poiché
$$a_n = \frac{1}{n^2} \times \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$
tale serie numerica ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$, cioè converge.

L'insieme di convergenza della serie assegnata è quindi $[-1, 1]$.

Inoltre, per un teorema ben noto, la serie data converge totalmente in $(L^\infty([-r, r]), \|\cdot\|_{\infty,[-r,r]})$ (e quindi uniformemente in $[-r, r]$), per ogni $r \in (0, 1)$.

Esercizio 2

- Nell'insieme aperto

$$[(-\infty, 0) \times \mathbb{R}] \bigcup [(0, +\infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})]$$

la funzione f è di classe C^1 e quindi differenziabile;

- Nei punti del tipo $(x_0, 0)$ con $x_0 > 0$ la funzione f è discontinua e quindi non differenziabile;

- Nei punti del tipo $(0, y_0)$ con $y_0 \leq 0$ la funzione f non è derivabile rispetto alla variabile x e quindi non è differenziabile;

- Nei punti del tipo $(0, y_0)$ con $y_0 > 0$ la funzione f è differenziabile. Infatti se $\|(x, y) - (0, y_0)\|$ è sufficientemente piccolo, allora deve essere $f(x, y) = 0$ oppure $f(x, y) = x^2$ e quindi

$$|f(x, y) - f(0, y_0)| = |f(x, y)| \leq x^2 = |x| \, |x| \leq \|(x, y) - (0, y_0)\| \, |x|,$$

da cui segue

$$|f(x, y) - f(0, y_0)| = o(\|(x, y) - (0, y_0)\|)$$

per $(x, y) \to (0, y_0)$. Ciò prova che effettivamente f è differenziabile in $(0, y_0)$ e che si ha $df(0, y_0) = 0$.

Esercizio 3

- (Soluzione generale della ED lineare omogenea associata) Le radici dell'equazione caratteristica
$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$
sono 0 e 2. Quindi la soluzione generale della ED lineare omogenea è
$$c_1 + c_2 e^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;

- (Soluzione particolare della ED assegnata) Cerchiamo una soluzione della forma
$$f(x) = ax^2 + bx + x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Poiché $f'(x) = 2ax + b$ e $f''(x) = 2a$, si tratta di determinare a e b tali che
$$-4x = f''(x) - 2f'(x) = 2a - 4ax - 2b \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Si ricava subito che $a = b = 1$ e quindi la soluzione particolare cercata è
$$x^2 + x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dunque, la soluzione generale della ED assegnata è
$$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + x^2 + x \qquad (x \in \mathbb{R})$$
con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dato che
$$y'(x) = 2c_2 e^{2x} + 2x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$
la condizione $y(0) = y'(0) = 0$ si traduce nel sistema
$$c_1 + c_2 = 0, \quad 2c_2 + 1 = 0$$
da cui trova $c_2 = -1/2$ e $c_1 = 1/2$ e quindi
$$y(x) = \frac{1}{2} - \frac{e^{2x}}{2} + x^2 + x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$