Analisi Matematica 2 (recupero)

* * *

Prova scritta del 7 settembre 2017

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Convergenza puntuale. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ +\infty & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Quindi l'insieme di convergenza puntuale è $(-\infty, 1]$ e il limite puntuale della successione assegnata è dato dalla funzione $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Convergenza L^∞. Osserviamo subito che se $a \in (-\infty, 1)$ allora la successione non può convergere uniformemente sugli insiemi del tipo $[a, 1]$, in quanto (per n sufficientemente grande) $f_n|_{[a,1]}$ è continua, mentre il suo limite puntuale $f|_{[a,1]}$ non lo è. Pertanto la successione non può convergere in $L^\infty([a, 1])$. A maggior ragione essa non può convergere in $L^\infty((-\infty, 1])$. Rimane da chiarire se la successione converga in $L^\infty((-\infty, b])$ con $-\infty < b < 1$ oppure in $L^\infty([a, b])$ con $-\infty < a < b < 1$. A questo scopo procediamo allo studio della funzione f_n.

Osserviamo che f_n è derivabile in ogni $x \neq -e^n$ e si ha

$$f_n'(x) = \frac{ne^{nx}(x + e^n) - e^{nx}}{(x + e^n)^2} = \frac{n(x + e^n) - 1}{(x + e^n)^2} e^{nx}$$

che si annulla nel punto $x_n := -e^n + 1/n$. Allora f_n ha le seguenti proprietà:

- In $(-\infty, -e^n)$ è negativa, decrescente e si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-e^{-n}-0} f_n(x) = -\infty;$$

- In $(-e^n, +\infty)$ è positiva. Inoltre essa è

- decrescente in $(-e^n, x_n]$, con

$$\lim_{x\to -e^{-n}+0} f_n(x) = +\infty;$$

- crescente in $[x_n, +\infty)$, con

$$\lim_{x\to +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

Da queste proprietà segue ora che:

- Se $-\infty < b < 1$, allora

$$\|f_n - f\|_{\infty,(-\infty,b]} = \|f_n\|_{\infty,(-\infty,b]} = +\infty$$

per n sufficientemente grande. Quindi la successione non converge in $L^\infty((-\infty, b])$;

- Se $-\infty < a < b < 1$, dato che x_n converge a $-\infty$ si avrà che $x_n < a$ per n sufficientemente grande. Quindi

$$\|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} = \|f_n\|_{\infty,[a,b]} = f_n(b)$$

per n sufficientemente grande. Se ne conclude che

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} = \lim_{n\to+\infty} f_n(b) = f(b) = 0$$

e cioè che la successione converge in $L^\infty([a, b])$.

Esercizio 2

Poniamo

$$F(x,y,z) := (\underbrace{x^2+y^2+z^2-1}_{F_1(x,y,z)}, \underbrace{x+y+z-1}_{F_2(x,y,z)}), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

e osserviamo che $F^{-1}(0)$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^3$ (più precisamente è una circonferenza, trattandosi dell'intersezione di una sfera con un piano). Quindi la funzione $\varphi|_{F^{-1}(0)}$ ha massimo e minimo per il teorema di Weierstrass.

Dal teorema dei moltiplicatori di Lagrange segue che se (x,y,z) è un punto di minimo o di massimo di $\varphi|_{F^{-1}(0)}$ allora esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\nabla\varphi(x,y,z) = \lambda_1 \nabla F_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla F_2(x,y,z)$$

e cioè

$$(1,-1,1) = \lambda_1(2x,2y,2z) + \lambda_2(1,1,1)$$

i.e.

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 1 \\ 2\lambda_1 y + \lambda_2 = -1 \\ 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Risolvendo il sistema di cinque equazioni ottenuto unendo le due equazioni vincolari a (1)

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 1 \\ 2\lambda_1 y + \lambda_2 = -1 \\ 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 1 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+y+z = 1 \end{cases}$$

si ottengono facilmente i due punti

$$(x,y,z) = (0,1,0), \qquad (x,y,z) = (2/3,-1/3,2/3).$$

Poiché

$$\varphi(0,1,0) = -1, \quad \varphi(2/3,-1/3,2/3) = 5/3$$

si può concludere che:

- Il valore minimo di $\varphi|_{F^{-1}(0)}$ è -1 e questo viene conseguito nel punto $(0,1,0)$;
- Il valore massimo di $\varphi|_{F^{-1}(0)}$ è 5/3 e questo viene conseguito nel punto $(2/3,-1/3,2/3)$.

Esercizio 3

Osserviamo che F soddisfa la condizione delle derivate incrociate. Infatti

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy^2}{xy-1}\right) = \frac{2xy(xy-1) - x^2y^2}{(xy-1)^2}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y}{xy-1}\right) = \frac{2xy(xy-1) - x^2y^2}{(xy-1)^2}.$$

L'esistenza del potenziale segue allora dal fatto che le tre componenti connesse di A sono insiemi stellati.

Ogni potenziale φ di F, deve soddisfare le identità

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{xy^2}{xy-1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2y}{xy-1}. \tag{2}$$

Dalla prima di queste identità si ottiene

$$\varphi(x,y) = \int \frac{xy^2}{xy-1}\,dx = \int \frac{xy^2 - y + y}{xy-1}\,dx = \int \left(y + \frac{y}{xy-1}\right) dx.$$

Quindi ogni funzione del tipo

$$\varphi(x,y) = xy + \ln|xy-1| + f(y)$$

dove f è una qualsiasi funzione di classe C^1, è un potenziale di F purché essa soddisfi anche la seconda identità di (2). Cioè deve valere

$$x + \frac{x}{xy-1} + f'(y) = \frac{x^2y}{xy-1}$$

che equivale a

$$f'(y) = 0.$$

Quest'ultima identità è banalmente verificata, per esempio, dalla funzione $f = 0$ e quindi un potenziale di F sarà dato da

$$\varphi(x,y) = xy + \ln|xy-1|.$$