Analisi Matematica 2 (recupero)

* * *

Prova scritta del 1 febbraio 2018

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Posto (per $n \geq 1$)

$$a_n := \frac{1}{n^2}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n$$

si ha

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(2+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{2^n}{2^{n+1}} \times \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{2(n+1)}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \left[\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{1}{2(n+1)}\right)^{2(n+1)}}\right]^{1/2}$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie data vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2} \times 1 \times \left[\frac{e}{e}\right]^{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Osserviamo che

$$\|a_n x^n\|_{\infty,[-1/2,1/2]} = \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \frac{1}{n^2}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{1/2}$$

e quindi, ricordando che $\lim_{n\to+\infty}(1+1/2n)^{2n} = e < 4$, si ha

$$\|a_n x^n\|_{\infty,[-1/2,1/2]} < \frac{2}{n^2}$$

definitivamente, i.e. da un certo n in poi. Se ne conclude che:

- L'intervallo di convergenza è $[-1/2, 1/2]$;
- La serie data converge totalmente in $(L^\infty([-1/2,1/2]), \|\cdot\|_{\infty,[-1/2,1/2]})$. In particolare la serie converge anche uniformemente nell'intervallo di convergenza.

Esercizio 2

Osserviamo che $Q := [1,2] \times [1,2]$ è un insieme compatto. e che f è una funzione continua. Allora f ha massimo e minimo per il teorema di Weierstrass. Indichiamo tali valori con M e m, rispettivamente.

Osserviamo che:

(i) $Q^\circ = (1,2) \times (1,2)$ e $f \in C^1(Q^\circ)$. Poiché

$$Df(x,y) = \left(-\frac{2}{x^3y^2} + \frac{1}{x^2y}, -\frac{2}{x^2y^3} + \frac{1}{xy^2}\right)$$

si vede subito che

$$\begin{aligned} I &:= \{(x,y) \in Q^\circ | Df(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in Q^\circ | xy = 2\} \\ &= \{(x, 2/x) | x \in (1,2)\}. \end{aligned}$$

Inoltre, per ogni $(x,y) \in I$ si ha

$$f(x,y) = \frac{1}{(xy)^2} - \frac{1}{xy} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

e cioè

$$f|_I = -\frac{1}{4};$$

(ii) ∂Q è un insieme compatto e quindi $f|_{\partial Q}$ ha massimo e minimo, per il teorema di Weierstrass. I valori M e m vanno quindi ricercati nella terna costituita da $-1/4$, $\max f|_{\partial Q}$ e $\min f|_{\partial Q}$.

Per determinare gli estremi di $f|_{\partial Q}$, osserviamo che $\partial Q = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ con

$$L_1 := \{1\} \times [1,2],\ L_2 := [1,2] \times \{1\},\ L_3 := \{2\} \times [1,2],\ L_2 := [1,2] \times \{2\}.$$

Vogliamo quindi studiare $f|_{L_1}$, con $i = 1,2,3,4$.

(iii) Per studiare $f|_{L_1}$, consideriamo

$$g_1(t) := f(1,t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}, \quad t \in [1,2].$$

Poiché $g_1'(t) = (t-2)/t^3 < 0$ per ogni $t \in (1,2)$, si ha che g_1 è decrescente e quindi

$$\min f|_{L_1} = g_1(2) = -\frac{1}{4}, \quad \max f|_{L_1} = g_1(1) = 0;$$

(iv) Per studiare $f|_{L_2}$, consideriamo

$$g_2(t) := f(t,1) = g_1(t), \quad t \in [1,2].$$

Dalle conclusioni del punto precedente, si ricava

$$\min f|_{L_2} = -\frac{1}{4}, \quad \max f|_{L_2} = 0;$$

(v) Per studiare $f|_{L_3}$, consideriamo

$$g_3(t) := f(2,t) = \frac{1}{4t^2} - \frac{1}{2t}, \quad t \in [1,2].$$

Poiché $g_3'(t) = (t-1)/4t^3 < 0$ per ogni $t \in (1,2)$, si ha che g_3 è crescente e quindi

$$\min f|_{L_3} = g_3(1) = -\frac{1}{4}, \quad \max f|_{L_3} = g_3(2) = -\frac{3}{16};$$

(vi) Per studiare $f|_{L_4}$, consideriamo

$$g_4(t) := f(t,2) = g_3(t), \quad t \in [1,2].$$

Dalle conclusioni del punto precedente, si ricava

$$\min f|_{L_4} = -\frac{1}{4}, \quad \max f|_{L_4} = -\frac{3}{16};$$

Dai punti (iii)-(iv)-(v)-(vi) segue ora che

$$\min f|_{\partial Q} = -\frac{1}{4}, \quad \max f|_{\partial Q} = 0.$$

Quindi, ricordando (ii):

- Si ha $M = \max f = 0$ e $m = \min f = -1/4$.

Inoltre, dai calcoli svolti precedentemente si vede che:

- La funzione f assume il valore minimo $m = -1/4$ in $(1,2)$, in $(2,1)$ e nei punti di I;
- La funzione f assume il valore massimo $M = 0$ in $(1,1)$.

Esercizio 3

Ricordiamo che l'equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

si può integrare moltiplicandola per il fattore $e^{A(t)}$, dove A è una primitiva di a. Nel nostro caso si ha

$$a(t) = 1 + \frac{\cos t}{2 + \sin t} = D[t + \ln(2 + \sin t)]$$

e

$$b(t) = \frac{t-1}{2+\sin t}. \tag{1}$$

Quindi possiamo prendere $A(t) = t + \ln(2 + \sin t)$, per cui

$$e^{A(t)} = e^t(2 + \sin t). \tag{2}$$

Moltiplicando l'equazione differenziale per tale fattore, otteniamo

$$e^{A(t)}y'(t) + e^{A(t)}a(t)y(t) = e^{A(t)}b(t)$$

cioè

$$D[e^{A(t)}y(t)] = e^{A(t)}b(t).$$

Sostituendo (1) and (2) in quest'ultima identità, si ottiene

$$D[e^t(2 + \sin t)y(t)] = e^t(2 + \sin t)\frac{t-1}{2+\sin t} = e^t(t-1)$$

da cui, integrando su $[0, x]$ e usando la formula di integrazione per parti

$$\begin{aligned} e^x(2 + \sin x)y(x) &= \int_0^x D[e^t(2 + \sin t)y(t)]dt \\ &= \int_0^x e^t(t-1)dt \\ &= \left[e^t(t-1)\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x e^t dt \\ &= (x-1)e^x + 1 - e^x + 1 \\ &= (x-2)e^x + 2. \end{aligned}$$

Si conclude che

$$y(x) = \frac{x-2}{2+\sin x} + \frac{2}{(2+\sin x)e^x}.$$