Analisi Matematica 3 (recupero)

* * *

Prova scritta del 7 settembre 2017

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Consideriamo l'insieme compatto

$$C := \{(\theta, \rho) \,|\, \theta \in [0, \pi/4],\, \rho \in [1, 2/\cos\theta]\}$$

e la $(2,2)$-parametrizzazione regolare $\varphi : C \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(\theta, \rho) := (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta), \qquad (\theta, \rho) \in C.$$

Allora si ha $E = \varphi(C)$ e quindi, per la formula dell'area e per il teorema di Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{E=\varphi(C)} x^2 y\, dxdy &= \int_C \rho^2 \cos^2\theta\, \rho\sin\theta\, \rho\, d\theta d\rho \\
&= \int_0^{\pi/4} \left(\int_1^{2/\cos\theta} \rho^4 \cos^2\theta \sin\theta\, d\rho \right) d\theta \\
&= \frac{1}{5} \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\, \sin\theta\, (\rho^5)_{\rho=1}^{\rho=2/\cos\theta} d\theta \\
&= -\frac{1}{5} \int_0^{\pi/4} [32\cos^{-3}\theta - \cos^2\theta](D\cos)(\theta)\, d\theta \\
&= -\frac{1}{5} \int_0^{\pi/4} D\left(-16\cos^{-2}\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta \right) d\theta \\
&= -\frac{1}{5} \left(-32 - \frac{1}{6\sqrt{2}} + 16 + \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{47}{15} + \frac{\sqrt{2}}{60}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Consideriamo il campo di vettori

$$F(x,y) := (-y,x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Allora, per la formula di Green, si ha

$$\int_{\partial E} F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1 = \int_E (D_1F_2 - D_2F_1) d\mathcal{L}^2 = 2\mathcal{L}^2(E)$$

dove con τ abbiamo indicato il campo tangente unitario che orienta ∂E positivamente. Ne segue che

$$2\mathcal{L}^2(E) = \int_{C_1} F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1 + \int_{C_2} F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1.$$

Osserviamo che per ogni $(x,y) \in C_2$ si ha

$$F(x,y) \cdot \tau(x,y) = (0,x) \cdot (-1,0) = 0$$

e quindi

$$\begin{aligned}
2\mathcal{L}^2(E) &= \int_{C_1} F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1 \\
&= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-t\sin t, t\cos t) \cdot (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t) \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t + t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t \\
&= \int_0^{2\pi} t^2 dt \\
&= \frac{8}{3}\pi^3
\end{aligned}$$

cioè

$$\mathcal{L}^2(E) = \frac{4}{3}\pi^3.$$

Esercizio 3

- (Proprietà di convergenza) Poiché $f|_{(-\pi,\pi)} \in L^2(-\pi,\pi)$, la serie di Fourier di f converge incondizionatamente a f in $(L^2(-\pi,\pi), \|\cdot\|_2)$. Inoltre, poiché la funzione f è regolare a tratti ed è continua, la serie di Fourier di f converge uniformemente a f.

- (Coefficienti) Poiché f è pari, si ha $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$. Inoltre

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt = \frac{\pi}{4}$$

e, per $n \geq 1$, si ha (per la formula di integrazione per parti)

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)D\left(\frac{\sin nt}{n}\right)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\frac{\sin nt}{n}\right]_{t=0}^{t=\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\frac{\sin nt}{n}\,dt\right) = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi/2}\sin nt\,dt \\
&= \frac{2}{\pi n}\left(\frac{\cos nt}{n}\right)_{\pi/2}^{0} = \frac{2}{\pi n^2}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Si conclude che se n è dispari allora

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}$$

mentre se n è pari ($n = 2k$ con $k \geq 1$) si ha

$$a_{2k} = \frac{1-\cos k\pi}{2\pi k^2} = \frac{1-(-1)^k}{2\pi k^2}.$$