Analisi Matematica 3 (recupero)

* * *

Prova scritta del 1 febbraio 2018

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Dal teorema di Fubini (sezioni con piani ortogonali all'asse z) si ottiene

$$\begin{aligned} I := \int_E 4xyz\,dxdydz &= 4\int_0^1 \left(\int_{E_z} xyz\,dxdy\right) dz \\ &= 4\int_0^1 z \left(\int_{E_z} xy\,dxdy\right) dz. \end{aligned}$$

Osserviamo che si ha

$$E_z = [0, 1-z] \times [z, 1] \qquad (z \in [0,1]).$$

e quindi, utilizzando un'altra volta il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{E_z} xy\,dxdy = \int_{[0,1-z]\times[z,1]} xy\,dxdy &= \int_0^{1-z} \left(\int_z^1 xy\,dy\right) dx \\ &= \int_0^{1-z} x \left(\frac{y^2}{2}\right)_{y=z}^{y=1} dx = \frac{1-z^2}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)_{x=0}^{x=1-z} \\ &= \frac{(1-z^2)(1-z)^2}{4} = \frac{-z^4+2z^3-2z+1}{4}. \end{aligned}$$

Si ottiene allora

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 z(-z^4+2z^3-2z+1)dz &= \int_0^1 -z^5+2z^4-2z^2+z\,dz \\ -\frac{1}{6}+\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2} &= \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Esercizio 2

Osserviamo che $\partial E = C \cup C'$, con $C' := [0,\pi] \times \{0\}$. Se scegliamo per C' l'orientazione $\tau' := (1,0)$, il teorema di Green si può scrivere come segue

$$\int_E (D_1F_2 - D_2F_1)dxdy = \int_C F\cdot \tau dH^1 + \int_{C'} F\cdot \tau' dH^1. \tag{1}$$

Sostituendo in (1) le identità

$$D_1F_2(x,y) = 0, \quad D_2F_1(x,y) = 1$$

e

$$F(x,y)\cdot \tau'(x,y) = F_1(x,y) = y - 2\sin x$$

otteniamo

$$\int_E -1\, dxdy = \int_C F\cdot \tau dH^1 + \int_{C'} (y-2\sin x) dH^1(x,y)$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_C F\cdot\tau\, dH^1 &= \int_E -1\, dxdy - \int_{C'}(y-2\sin x)dH^1(x,y) \\ &= -\mathcal{L}^2(E) + 2\int_{C'} \sin x\, dH^1(x,y). \end{aligned} \tag{2}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(E) &= \int_0^\pi (2+\cos x)\sin x\, dx = -\int_0^\pi (2+\cos x)D(2+\cos x)\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi D(2+\cos x)^2 dx = -\frac{1-9}{2} = 4 \end{aligned} \tag{3}$$

e per la formula dell'area (parametrizzando C' con $\gamma(t) := (t,0)$, dove $t \in [0,\pi]$)

$$\int_{C'} \sin x\, dH^1(x,y) = \int_0^\pi \sin t\, dt = 2. \tag{4}$$

Sostituendo (3) e (4) in (2), concludiamo che

$$\int_C F\cdot\tau\, dH^1 = -4 + 4 = 0.$$

Esercizio 3

Indichiamo con $(\cdot,\cdot)_2$ il prodotto scalare che induce $\|\cdot\|_2$ e ricordiamo che

- $(\cos hx, \cos kx)_2 = (\sin hx, \sin kx)_2 = 0$, se $h \neq k$ e $h, k \geq 1$;
- $(\cos hx, \cos hx)_2 = (\sin hx, \sin hx)_2 = \pi$, se $h \geq 1$;
- $(\cos hx, \sin kx)_2 = 0$, se $h, k \geq 1$.

Da queste identità e dalla bilinearità del prodotto scalare si ottiene

$$\begin{aligned}\|f_1\|_2^2 = (f_1, f_1)_2 &= (\cos x + \sin 2x, \cos x + \sin 2x)_2\\ &= \|\cos x\|_2^2 + \|\sin 2x\|_2^2 + 2(\cos x, \sin 2x)_2\\ &= 2\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|f_2\|_2^2 = (f_2, f_2)_2 &= (\sin 2x - \cos x + \cos 7x, \sin 2x - \cos x + \cos 7x)_2\\ &= \|\sin 2x\|_2^2 + \|\cos x\|_2^2 + \|\cos 7x\|_2^2\\ &\quad - 2(\sin 2x, \cos x)_2 + 2(\sin 2x, \cos 7x)_2 - 2(\cos x, \cos 7x)_2\\ &= 3\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|f_3\|_2^2 = (f_3, f_3)_2 &= (2\cos 7x - \sin 2x + \cos x, 2\cos 7x - \sin 2x + \cos x)_2\\ &= 4\|\cos 7x\|_2^2 + \|\sin 2x\|_2^2 + \|\cos x\|_2^2\\ &\quad - 4(\cos 7x, \sin 2x)_2 + 4(\cos 7x, \cos x) - 2(\sin 2x, \cos x)_2\\ &= 6\pi\end{aligned}$$

da cui

$$\|f_1\|_2 = \sqrt{2\pi}, \quad \|f_2\|_2 = \sqrt{3\pi}, \quad \|f_3\|_2 = \sqrt{6\pi}.$$

Inoltre (grazie alle stesse identità), si ha

$$\begin{aligned}(f_1, f_2)_2 &= (\cos x, \sin 2x)_2 - \|\cos x\|_2^2 + (\cos x, \cos 7x)_2\\ &\quad + \|\sin 2x\|_2^2 - (\sin 2x, \cos x)_2 + (\sin 2x, \cos 7x)_2\\ &= -\pi + \pi = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f_1, f_3)_2 &= 2(\cos x, \cos 7x)_2 - (\cos x, \sin 2x)_2 + \|\cos x\|_2^2\\ &\quad + 2(\sin 2x, \cos 7x)_2 - \|\sin 2x\|_2^2 + (\sin 2x, \cos x)_2\\ &= \pi - \pi = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f_2, f_3)_2 &= 2(\sin 2x, \cos 7x)_2 - \|\sin 2x\|_2^2 + (\sin 2x, \cos x)_2 \\ &\quad - 2(\cos x, \cos 7x)_2 + (\cos x, \sin 2x)_2 - \|\cos x\|_2^2 \\ &\quad + 2\|\cos 7x\|_2^2 - (\cos 7x, \sin 2x)_2 + (\cos 7x, \cos x)_2 \\ &= -\pi - \pi + 2\pi = 0.\end{aligned}$$

Posto $u_i := f_i / \|f_i\|_2$ $(i = 1, 2, 3)$, si ha:

- $\|u_i\|_2 = \frac{\|f_i\|_2}{\|f_i\|_2} = 1 \quad (i = 1, 2, 3)$
- $(u_1, u_2)_2 = \frac{(f_1, f_2)_2}{\|f_1\|_2 \|f_2\|_2} = 0$ e analogamente $(u_1, u_3)_2 = (u_2, u_3)_2 = 0$.

Abbiamo così verificato che la famiglia $\{u_1, u_2, u_3\}$ è ortonormale in $L^2(-\pi, \pi)$. Tale famiglia però non è completa: se lo fosse, dalle identità

$$(u_i, \sin x)_2 = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

che come al solito si ricavano subito dalle formule richiamate all'inizio, seguirebbe la conclusione assurda che $\sin x = 0$.