Esercizi su successioni e serie di funzioni (replicati da [1, 2, 3, 4])

Studiare le proprietà di convergenza delle seguenti successioni di funzioni $\{f_n\}$:

$f_n(x) = (1-x)x^n$

$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$

$f_n(x) = \frac{x^2}{n+x^2}$

$f_n(x) = \arctan\frac{x}{n+1}$

$f_n(x) = \arctan(nx)$

$f_n(x) = e^{-n^2x^2}$

$f_n(x) = \max\{0; 1-(x-n)^2\}$

$f_n(x) = \max\{0; 2-n(x-1)\}$

$f_n(x) = \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$

$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

$f_n(x) = \frac{x^n}{n+x^{2n}}$

$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$

$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx}$ $(x \neq 0)$

$f_n(x) = n^x$

$f_n(x) = \frac{x^n+x^{3n}}{1+x^{2n}}$

Sia $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$. Provare che $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

Sia $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ e $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Provare che $\lim_{n\to\infty} f'_n(0) \neq f'(0)$.

$f_n(x) = \sqrt{\sin^2 x + n^{-2}}$

$f_n(x) = \frac{3x+n}{x+n}$ $(x \geq 0)$

$$f_n(x) = n^2(1-x)^n x^2$$

$$f_n(x) = \frac{1+x}{x^n+n^2}\ (x \geq 0)$$

$$f_n(x) = n^{n^x}$$

Studiare le proprietà di convergenza delle seguenti serie di funzioni:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+1}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} |x|^{nx}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{\sqrt{n}}}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+|x|^{n^2}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(1-x^{2n})$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{2n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n \quad (\text{con } a \in (0,1))$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{x^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{1+x^{2n}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\sqrt{n}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{nx} x^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x+(\ln n)^x}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(2^{3n} + 3^{2n})x^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^{2n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{n+1}\right)^n x^{2n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \text{ con } a_n := \sum_{k=1}^{n} k^7$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4n^2+7n+1}{n^3+18n+2}\right)^n x^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+2}{x^2+1}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+4} e^{nx}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{4n^2+n} - 2n\right) x^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n+1}}{(x+1)^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n^2}}{n!}$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \sin(n\pi/4)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$

$\sum_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1+x)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^{2n})^{1/3}}{3^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(x \ln x)^n$

Bibliography

[1] T.M. Apostol: Calcolo, volume terzo, analisi 2. Bollati Boringhieri 1978.
[2] M. Bertsch, R. Dal Passo e L. Giacomelli: Analisi matematica (seconda edizione). McGraw-Hill 2011.
[3] J.P. Cecconi, L.C. Piccininini e G. Stampacchia: Esercizi e problemi di analisi matematica, I vol. Liguori Editore 1996.
[4] E. Giusti: Analisi matematica 2. Bollati Boringhieri 2003.