

**LABORATORY OF DIDACTICS OF MATHEMATICS**  
**DIARIO DEL CORSO**  
**A.A. 2016/2017**

SILVANO DELLADIO

- **21 febbraio 2017 [3 ore]**. Presentazione del corso. Punti critici nella formulazione del problema isoperimetrico. Il problema di Erone e la sua risoluzione elementare. Applicazione alla risoluzione del problema isoperimetrico per i triangoli del piano. Approfondimenti relativi al teorema di Erone:
  - Proprietà ottica dell'ellisse;
  - Teorema di Erone generalizzato (problema di tipo brachistocrona) I. Risoluzione attraverso riduzione a un problema di minimo per una funzione di una variabile.
  
- **28 febbraio 2017 [6 ore]**. Dimostrazione elementare del teorema dei moltiplicatori di Lagrange (due variabili, un vincolo).
  - Teorema di Erone generalizzato (problema di tipo brachistocrona) II. Risoluzione generale, mediante il teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

Il problema isoperimetrico per i quadrilateri, risoluzione elementare e completa per step successivi, usando il teorema di Erone. Problema isoperimetrico per i poligoni con  $2N$  lati:

- Funzione area e idea della dimostrazione dell'esistenza via teorema di Weierstrass.
- **6 marzo 2017 [9 ore]**. Problema isoperimetrico per i poligoni con  $2N$  lati:
    - Se esiste un poligono massimale, allora esso è quello regolare (in tre passi: convessità, equilateralità, inscrizione nel disco).

Sia  $\mathcal{A}_p$  la famiglia dei sottoinsiemi aperti e connessi  $E$  del piano aventi frontiera di classe  $C^1$  a tratti e tali che  $\text{per}(E) = p$ . Allora per ogni  $E \in \mathcal{A}_p$  si ha

$$\mathcal{L}^2(E) \leq \mathcal{L}^2(D_p)$$

dove  $D_p$  è il disco di perimetro  $p$  (dimostrazione basata sulla risoluzione del problema isoperimetrico nella famiglia dei  $2N$ -poligoni).

Simmetrizzazione di Steiner:

- (i)  $\mathcal{L}^2(S_r(E)) = \mathcal{L}^2(E)$ ;
- (ii)  $\text{per}(S_r(E)) \leq \text{per}(E)$ ; inoltre vale l'uguaglianza se e solo se  $E$  è simmetrico rispetto alla direzione di  $r$ .

Dimostrazione di tale risultato nel caso in cui  $E$  è un poligono, via teorema di Erone.

Dimostrazione di (i) nel caso più generale che  $E$  sia una regione compresa fra due grafici di funzioni  $C^1$  a tratti.

- **15 marzo 2017 [12 ore]**. Dimostrazione (basata sul teorema di Erone) del secondo punto del teorema di Steiner. Applicazione: se  $E_M$  è un insieme massimale in  $\mathcal{A}_p$  (i.e. se  $\mathcal{L}^2(E_M) = \sup_{E \in \mathcal{A}_p} \mathcal{L}^2(E)$ ) allora  $E_M = D_p$ . Richiami dalla teoria  $L^2$  della serie di Fourier. Identità di Bessel. Disuguaglianza isoperimetrica: dimostrazione di Hurwitz, I parte.
- **21 marzo 2017 [15 ore]**. Disuguaglianza isoperimetrica: conclusione della dimostrazione di Hurwitz. Presentazione del problema della brachistocrona. La risoluzione di Johann Bernoulli e un percorso didattico ad essa relativo. Particolari della metodologia didattica. Condizione di brachistocrona. La retta tangente alla brachistocrona nel suo punto iniziale è verticale. Test di esclusione (segmento e circonferenza).
- **28 marzo 2017 [18 ore]**. Deduzione del funzionale tempo. Variazione prima del funzionale tempo, equazione di Eulero. Osservazioni:
  - L'equazione di Eulero equivale alla condizione di brachistocrona;
  - Dall'equazione di Eulero segue subito che la brachistocrona è concava e che la sua retta tangente nel punto iniziale è verticale.
 Test di esclusione del segmento, della circonferenza e del grafico di  $x \mapsto y_B(x/x_B)^\alpha$  con  $\alpha \in (0, 1)$ . La curva cicloide: definizione e parametrizzazione. La curva cicloide verifica l'equazione di Eulero. Proprietà tautocrona della curva cicloide.
- **4 aprile 2017 [21 ore]**. Calcolo della lunghezza della curva cicloide. Il pendolo cicloidale. Introduzione alla geometria della sfera: punti, rette, segmenti, poligoni, angoli. Il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^3$ . Geometria del triangolo sferico:
  - Formula dell'area e conseguenze;
  - Formula del coseno di un angolo in termini dei lati.
 Applicazione del prodotto scalare all'insegnamento della geometria analitica nella scuola secondaria di secondo grado: trattazione della teoria della retta nel piano e della teoria del piano nello spazio.
- **11 aprile 2017 [24 ore]**. Tre applet di geogebra relativi a un percorso di laboratorio sulla brachistocrona per la scuola secondaria di secondo grado ("Doppio strato", "Problema discretizzato", "Test di esclusione"). Introduzione alle simulazioni didattiche, descrizione del file della cronaca. Buone pratiche didattiche:
  - Cogliere l'idea di una dimostrazione attraverso gli esempi;
  - Trattazione a spirale (e.g. il limite, la derivata, l'area);
  - Le occasioni provviste dall'eserciziario standard;
  - L'insegnante baro.
 Esempi.
- **2-30 maggio 2017 [ulteriori 18 ore, suddivise in 6 lezioni]**. Simulazioni, con relative discussioni e approfondimenti (cfr. file della cronaca).