Esercizi su formula di Taylor, massimi e minimi di funzione

0.1

Trovare (dopo averne motivato l'esistenza) il minimo della funzione

$$f(x, y, z) := \frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2$$

soggetta ai vincoli

$$x + 2y + z = 1, \quad 4x - 2y + z = 0.$$

0.2

Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) := xy(x^2 + y^2 - 2x)$$

e si affrontino le seguenti questioni:

- determinare e classificare i punti critici di f;
- dire se esistono il massimo ed il minimo assoluti di f nel disco chiuso di raggio 3 centrato nell'origine e, in caso affermativo, ricavarli;
- dire se esistono il massimo ed il minimo assoluti di f in $\mathbf{R}^2$ e, in caso affermativo, ricavarli;
- si può ricondurre la particolare simmetria dell'insieme dei punti critici a qualche simmetria di f ?

0.3

Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) := x^2y - (x+y)^2$$

e classificare quelli diversi da $(0,0)$.

0.4

Determinare gli estremi locali e globali della funzione

$$f(x,y) := x^3 + xy^2 - 2xy$$

nell'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2x - x^2\}$.

0.5

Classificare gli eventuali punti critici della funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) := (x + y^2)e^x.$$

Dire se f ha massimo assoluto. Determinare il minimo assoluto di f nel disco chiuso di raggio 1 centrato in $(0,0)$.

0.6

Sia C il cono di equazione

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Determinare esplicitamente la distanza $d(x,y)$ del punto $(1,1,0)$ dal punto di C avente $(x,y,0)$ come ombra.
- Verificare che il grafico della funzione

  $$f(x,y) := d^2(x,y)$$

  è convesso in ogni suo punto.
- Dimostrare che f ha un unico punto stazionario $P_0(x_0, y_0)$ e che questo è di minimo assoluto.
- Verificare che il vettore

  $$(1,1,0) - (x_0, y_0, \sqrt{x_0^2 + y_0^2})$$

  è perpendicolare a C nel punto $(x_0, y_0, \sqrt{x_0^2 + y_0^2})$.

0.7

Data la funzione

$$f(x, y) = \ln(2 + xy)$$

se ne scriva il polinomio di Taylor del secondo ordine con "punto iniziale" in $(0, 0)$. Studiare la forma del grafico di f nel punto $(0, 0, \ln 2)$.

0.8

Stabilire se la funzione

$$f(x, y) := x^2 + 6xy + 2y^2$$

ammette massimo e minimo assoluti sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine. In caso affermativo, determinarne i valori.

0.9

Studiare i massimi e minimi, relativi e assoluti, della funzione

$$f(x, y) := \ln(1 + xy)$$

nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$.

0.10

Data la funzione

$$f(x, y) := e^{y-2x},$$

scrivere l'equazione del piano tangente al grafico G di f nel punto $(1, 2, 1)$. Descrivere infine la forma di G nello stesso punto (convesso, concavo, a sella).

0.11

Studiare i massimi e i minimi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy$$

ristretta all'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, \;\; 0 \le x < 1\}.$$

0.12

Dimostrare che la funzione

$$f(x,y) := \frac{x^2 - 3y^2 + 8xy}{2 - x^2 - y^2}$$

ammette massimo e minimo assoluti sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine e quindi determinarne i valori.

0.13

Data la funzione

$$f(x,y) := \sin(xy + x^3 + y^3), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

determinare la forma del grafico di f nel punto $(0,0,0)$.

0.14

Data la funzione

$$f(x,y) := \ln(1 + x^2 + y^2), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

scrivere l'espressione del polinomio di Taylor di secondo grado con "punto iniziale" in $(1,1)$. Calcolare il valore di tale polinomio in $(0,0)$.

0.15

Considerata la funzione

$$(x,y) \mapsto f(x,y) := \frac{x^2 + 2xy + y^2}{1 + x^2 + y^2}, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

verificare che si ha

$$\min_{S^1} f + \max_{S^1} f = 1.$$

0.16

Scrivere la formula di Taylor della funzione

$$f(x,y) := \cos(x + y^3 + y + x^5 y^2), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

nel punto $(0,0)$ e stabilire in tal punto la forma del grafico di f.