Analisi Matematica B

* * *

Prova scritta del 6 settembre 2018

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Le equazioni di G_f (grafico di f) e di G_g (grafico di g) sono, rispettivamente:

$$z = x^2 + y^2 + xy, \quad z = 1 + xy.$$

Quindi l'equazione della curva che si ottiene come proiezione ortogonale nel piano xy della curva $C := G_f \cap G_g$ è

$$x^2 + y^2 + xy = 1 + xy$$

e cioè la circonferenza unitaria centrata in $(0,0)$

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Pertanto una $(1,3)$-parametrizzazione di C è data da

$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t, 1 + \cos t \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

L'integrale di F lungo la curva C, con l'orientazione indotta da γ, è dunque

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt &= \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, 1 + \cos t \sin t - \cos t \sin t) \cdot \\
&\qquad \cdot (-\sin t, \cos t, \cos^2 t - \sin^2 t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(2t)\, dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Posto $Q := [1,2] \times [1,2]$, osserviamo prima di tutto che $(x,y) \in A$ se e soltanto se esiste $(s,t) \in Q$ tale che

$$\begin{cases} y = sx \\ y = 1 - tx. \end{cases} \tag{1}$$

Come si verifica facilmente, il sistema (1) equivale a

$$\begin{cases} x = \frac{1}{s+t} \\ y = \frac{s}{s+t} \end{cases}$$

e quindi la mappa

$$Q \ni (s,t) \mapsto \left(\frac{1}{s+t}, \frac{s}{s+t} \right)$$

ha come immagine A. Inoltre, com'è facile verificare, tale mappa è biiettiva (oltre che, ovviamente, di classe C^1). Si ottiene così la seguente $(2,3)$-parametrizzazione regolare di S:

$$\varphi(s,t) := \left(\frac{1}{s+t}, \frac{s}{s+t}, \frac{1}{s+t} \right), \quad (s,t) \in Q.$$

Poiché si ha

$$J\varphi(s,t) = \|D_1\varphi(s,t) \times D_2\varphi(s,t)\| = \frac{\sqrt{2}}{(s+t)^3}$$

per ogni $(s,t) \in (1,2) \times (1,2)$, applicando la formula dell'area e il teorema di Fubini si ricava:

$$\begin{aligned} \int_{S=\varphi(Q)} \frac{1}{xyz} \, d\mathcal{H}^2(x,y,z) &= \int_{(1,2)\times(1,2)} \frac{(s+t)^3}{s} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(s+t)^3} \, d\mathcal{L}^2(s,t) \\ &= \sqrt{2} \int_{(1,2)\times(1,2)} \frac{1}{s} \, d\mathcal{L}^2(s,t) \\ &= \sqrt{2} \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{1}{s} \, dt \right) ds \\ &= \sqrt{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Esercizio 3

Poiché f è dispari si ha $a_n = 0$ per ogni $n \geq 0$. Inoltre, per ogni $n \geq 1$ si ha

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\big(I_1(n) + I_2(n)\big)$$

dove

$$I_1(n) := \int_0^{\pi/2} t \sin(nt)dt, \quad I_2(n) := \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t) \sin(nt)dt$$

Calcoliamo i due integrali $I_1(n)$ e $I_2(n)$. Si ha

$$\begin{aligned} I_1(n) &= -\frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} tD(\cos(nt))dt \\ &= -\frac{1}{n} \left(\big[t \cos(nt)\big]_{t=0}^{t=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos(nt)dt \right) \\ &= -\frac{\pi}{2n} \cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_2(n) &= -\frac{1}{n} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)D(\cos(nt))dt \\ &= -\frac{1}{n} \left(\big[(\pi - t) \cos(nt)\big]_{t=\pi/2}^{t=\pi} + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(nt)dt \right) \\ &= \frac{\pi}{2n} \cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$b_n = \frac{4}{n^2\pi} \sin\frac{n\pi}{2}$$

ossia $b_{2k} = 0$ (con $k \geq 1$) e

$$b_{2k+1} = \frac{4(-1)^k}{(2k+1)^2\pi} \quad (\text{con } k \geq 0).$$

Pertanto la serie di Fourier di f è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{(2k+1)^2\pi} \sin(2k+1)x.$$

Infine, poiché f è continua, la sua serie di Fourier converge uniformemente a f stessa (osserviamo che, di conseguenza, ovviamente, la serie converge anche in $L^2(-\pi, \pi)$ e puntualmente in $\mathbb{R}$).