Analisi Matematica B

* * *

Prova scritta del 7 febbraio 2019 (V appello)

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1 Dal teorema di Fubini segue che

$$I := \int_E (x+y+z)\, d\mathcal{L}^3(x,y,z) = \int_T \left(\int_0^{2-x-y} (x+y+z)\ dz \right) d\mathcal{L}^2(x,y)$$

dove

$$T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ 0 \le y \le x,\, 1 \le x+y \le 2\}.$$

Poiché

$$\begin{aligned}\int_0^{2-x-y} (x+y+z)\ dz &= \left[(x+y)z + \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=2-x-y} \\ &= 2(x+y) - (x+y)^2 + 2 - 2(x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} \\ &= 2 - \frac{(x+y)^2}{2}\end{aligned}$$

si ha

$$(1) \qquad I = \int_T \left(2 - \frac{(x+y)^2}{2} \right) d\mathcal{L}^2(x,y) = 2\mathcal{L}^2(T) - \frac{1}{2} \int_T (x+y)^2 d\mathcal{L}^2(x,y).$$

Osserviamo che $\mathcal{L}^2(T)$ coincide con metà area del trapezio

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ 1 \le x+y \le 2,\, x \ge 0,\, y \ge 0\}$$

e cioè

$$(2) \qquad \mathcal{L}^2(T) = \frac{2 - 1/2}{2} = \frac{3}{4}.$$

Rimane da calcolare l'ultimo integrale in (1). Per farlo, osserviamo prima di tutto che, posto

$$s = x+y, \quad t = y/x,$$

la trasformazione $(x,y) \mapsto (s,t)$ ha come immagine il quadrato $Q := [1,2] \times [0,1]$. Ora è facile invertire tale sistema e ottenere quindi la seguente trasformazione inversa

$$\varphi : Q \to T, \quad \varphi(s,t) = \left(\frac{s}{1+t}, \frac{st}{1+t} \right)$$

che è anche una $(2,2)$-parametrizzazione regolare di T. Si ha

$$J\varphi(s,t) = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{1+t} & -\frac{s}{(1+t)^2} \\ \frac{t}{1+t} & \frac{s}{(1+t)^2} \end{pmatrix}\right| = \frac{s}{(1+t)^2}, \qquad (s,t) \in (1,2)\times(0,1).$$

Dalla formula dell'area e di nuovo dal Teorema di Fubini otteniamo allora

$$\begin{aligned}
\int_T (x+y)^2 d\mathcal{L}^2(x,y) &= \int_{\varphi(Q)} (x+y)^2 d\mathcal{H}^2(x,y) \\
&= \int_Q \left(\frac{s}{1+t} + \frac{st}{1+t}\right)^2 \frac{s}{(1+t)^2} d\mathcal{L}^2(s,t) \\
&= \int_Q \frac{s^3}{(1+t)^2}\, d\mathcal{L}^2(s,t) \\
&= \int_1^2 s^3 ds \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\, dt
\end{aligned}$$

e cioè

$$\int_T (x+y)^2 d\mathcal{L}^2(x,y) = \frac{15}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{8}. \tag{3}$$

Da (1), (2) and (3) segue finalmente che

$$I = 2 \times \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{15}{8} = \frac{9}{16}.$$

Esercizio 2

Sia E la regione limitata del piano avente come frontiera la curva parametrizzata da $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, con

$$\gamma(t) = (\rho(t)\cos t, \rho(t)\sin t), \qquad \rho(t) := 2 + \cos(4t).$$

Inoltre consideriamo il campo vettoriale $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con

$$F_1(x, y) := -y, \quad F_2(x, y) := x$$

e osserviamo che si ha

$$D_1F_2 - D_2F_1 = 2$$

e

$$\begin{aligned} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) \\ &= -\gamma_2(t)\gamma_1'(t) + \gamma_1(t)\gamma_2'(t) \\ &= -\rho(t)\sin t\,[\rho'(t)\cos t - \rho(t)\sin t] \\ &+ \rho(t)\cos t\,[\rho'(t)\sin t + \rho(t)\cos t] \\ &= [\cos^2 t + \sin^2 t]\rho(t)^2 \\ &= 4 + 4\cos(4t) + \cos^2(4t). \end{aligned}$$

Dall'identità di Green

$$\int_E (D_1F_2 - D_2F_1)\, d\mathcal{L}^2 = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt,$$

si ottiene allora

$$2\mathcal{L}^n(E) = \int_0^{2\pi} [4 + 4\cos(4t) + \cos^2(4t)]\, dt = 8\pi + \int_0^{2\pi} \cos^2(4t)\, dt.$$

Cambiando la variabile nell'integrale, si verifica subito che

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(4t)\, dt = \frac{1}{4}\int_0^{8\pi} \cos^2 s\, ds = \int_0^{2\pi} \cos^2 s\, ds = \pi$$

e quindi

$$2\mathcal{L}^n(E) = 9\pi$$

da cui si conclude

$$\mathcal{L}^n(E) = \frac{9\pi}{2}.$$

Esercizio 3

E' facile tracciare un grafico soddisfacente di f_n, osservando che:

- La funzione f_n è pari, cioè $f_n(-x) = f_n(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Poiché la funzione arctan è strettamente crescente e si annulla in 0, gli zeri di f_n sono le soluzioni dell'equazione $x^4 - n^2x^2 = 0$, ossia i numeri 0 e $\pm n$.
- Si ha $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \pi/2$, cioè la retta orizzontale $y = \pi/2$ è un asintoto del grafico di f_n.
- f_n è derivabile ovunque e vale

  $$f_n'(x) = \frac{4x^3 - 2n^2x}{1 + (x^4 - n^2x^2)^2} = \frac{2x(2x^2 - n^2)}{1 + (x^4 - n^2x^2)^2}$$

  che si annulla in 0 e in $\pm n/\sqrt{2}$. Quindi f_n decresce in $[0, n/\sqrt{2}]$ e cresce in $[n/\sqrt{2}, +\infty)$. In particolare f_n ha un massimo locale in 0 e un minimo globale in $n/\sqrt{2}$, con

  $$f_n(n/\sqrt{2}) = -\arctan(n^2/4).$$

  Notiamo che $\lim_{n\to+\infty} f_n(n/\sqrt{2}) = -\pi/2$.

Inoltre, relativamente alle proprietà di convergenza della successione $\{f_n\}$, si ha:

- $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, dove $f(0) := 0$ e $f(x) := -\pi/2$ se $x \neq 0$.
- $\{f_n|_{[-a,a]}\}$ non può convergere in $L^\infty([-a, a])$ (con $0 < a < +\infty$). Infatti, se lo facesse il limite dovrebbe essere $f|_{[-a,a]}$ e tale funzione dovrebbe essere continua, assurdo in quanto f è ovviamente discontinua in 0. Ciò è confermato anche dalla seguente proprietà evidente

  $$\|f_n|_{[-a,a]} - f|_{[-a,a]}\|_{\infty,[-a,a]} = \pi/2 \qquad \text{(per } n \text{ abbastanza grande)}.$$

- Se $0 < a < +\infty$, vale

  $$\|f_n|_{\mathbb{R}\setminus(-a,a)} - f|_{\mathbb{R}\setminus(-a,a)}\|_{\infty,\mathbb{R}\setminus(-a,a)} = \pi \qquad \text{(per ogni } n\text{)}$$

  e quindi $\{f_n|_{\mathbb{R}\setminus(-a,a)}\}$ non converge in $L^\infty(\mathbb{R} \setminus (-a, a))$.
- Se $0 < a < b < +\infty$, posto $I_{ab} := [-b, -a] \cup [a, b]$, vale

  $$\|f_n|_{I_{ab}} - f|_{I_{ab}}\|_{\infty,I_{ab}} = \max(f_n(a) + \pi/2, f_n(b) + \pi/2) < f_n(a) + f_n(b) + \pi.$$

  Poiché $\lim_{n\to+\infty}[f_n(a) + f_n(b) + \pi] = f(a) + f(b) + \pi = 0$, si ottiene

  $$\lim_{n\to+\infty} \|f_n|_{I_{ab}} - f|_{I_{ab}}\|_{\infty,I_{ab}} = 0.$$

  Quindi la successione $\{f_n|_{I_{ab}}\}$ converge $f|_{I_{ab}}$ in $(C(I_{ab}, \|\cdot\|_{\infty,I_{ab}})$.