Analisi Matematica B

* * *

Prova scritta del 9 gennaio 2019 (IV appello)

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1

Osserviamo che E è il sottografico della funzione xy sulla porzione di disco

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \geq 0, \, y \geq 0, \, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Usando il teorema di Fubini (per fibre in direzione z), otteniamo allora

$$I := \int_E \frac{2z}{x^2 + y^2 + 1} \, d\mathcal{L}^3(x, y, z) = \int_D \left(\int_0^{xy} \frac{2z}{x^2 + y^2 + 1} \, dz \right) d\mathcal{L}^2(x, y)$$

cioè

$$I = \int_D \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2 + 1} \, d\mathcal{L}^2(x, y).$$

Consideriamo ora la seguente $(2, 2)$-parametrizzazione regolare di D (cambio di variabili cartesiane-polari)

$$\varphi : R := [0, \pi/2] \times [0, 2] \to \mathbb{R}^2, \quad (\theta, \rho) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

e ricordiamo che $J\varphi(\theta, \rho) = \rho$. Dalla formula dell'area e adl teorema di Fubini segue allora che

$$\begin{aligned} I &= \int_{\varphi(R)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2 + 1} \, d\mathcal{L}^2(x, y) = \int_R \frac{\rho^2 (\cos\theta)^2 \rho^2 (\sin\theta)^2}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta + 1} \, \rho \, d\mathcal{L}^2(\theta, \rho) \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^2 \frac{\rho^5 (\cos\theta)^2 (\sin\theta)^2}{\rho^2 + 1} d\rho \right) d\theta \end{aligned}$$

ossia

$$I = I_1 I_2$$

dove

$$I_1 = \int_0^2 \frac{\rho^5}{\rho^2 + 1} \, d\rho, \qquad I_2 := \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^2 (\sin\theta)^2 \, d\theta.$$

- **Calcolo di I_1.**

$$I_1 = \int_0^2 \frac{(\rho^4-1)\rho}{\rho^2+1} + \frac{\rho}{\rho^2+1}\,d\rho = \int_0^2 (\rho^2-1)\rho + \frac{\rho}{\rho^2+1}\,d\rho$$
$$= \left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^2}{2} + \frac{\ln(\rho^2+1)}{2}\right]_0^2 = 2 + \ln\sqrt{5};$$

- **Calcolo di I_2.** Ricordiamo che $\cos(2\alpha) = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2$, da cui

$$(\cos\alpha)^2 = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}, \qquad (\sin\alpha)^2 = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$

Quindi

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \times \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2(2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(4\theta)}{2} = \frac{\pi}{16}.$$

Se ne conclude che
$$I = \frac{(2+\ln\sqrt{5})\pi}{16}.$$

Esercizio 2

Poniamo

$$I_1 := \int_{\overline{S}} F, \qquad I_2 := \int_{\overline{C}} F$$

dove

$$F(x,y,z) := (x, x(1-z), \sin(z+xy)), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Calcoliamo I_1 e I_2, separatamente:

- Possiamo parametrizzare $\overline{S}$ con

  $$\gamma(t) := (1,0,0) + t[(0,1,0) - (1,0,0)] = (1-t, t, 0), \quad t \in [0,1].$$

  Allora

  $$I_1 = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^1 (1-t, 1-t, \sin(t-t^2)) \cdot (-1,1,0)\, dt$$

  cioè

  $$I_1 = 0.$$

- Considerando la seguente parametrizzazione di $\overline{C}$

  $$\lambda(t) := (0,1,1) + (0, -\sin t, -\cos t) = (0, 1-\sin t, 1-\cos t), \quad t \in [0,\pi],$$

  otteniamo

  $$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\pi F(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)\, dt \\ &= \int_0^\pi (0,0,\sin(1-\cos t)) \cdot (0, -\cos t, \sin t)\, dt \\ &= \int_0^\pi \sin t \sin(1-\cos t)\, dt \\ &= \int_0^\pi D[-\cos(1-\cos t)]\, dt \end{aligned}$$

  da cui, per il teorema fondamentale del calcolo, otteniamo

  $$I_2 = 1 - \cos 2.$$

Concludiamo che

$$\int_{\overline{S} \cup \overline{C}} F = I_1 + I_2 = 1 - \cos 2.$$

Esercizio 3

Convergenza puntuale. Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(x)|^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \left| \arctan \frac{x}{n^{1/n}} \right| = |\arctan x|.$$

Allora:

- Per $|x| < \tan 1$, la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente.
- Per $|x| > \tan 1$, la serie non converge.

Inoltre, posto per semplicità $a := \tan 1$, si ha

$$\begin{aligned} f_n(a) &= \left(\arctan \frac{a}{n^{1/n}}\right)^n = \left(1 + \arctan \frac{a}{n^{1/n}} - 1\right)^n \\ &= K_n^{n\left[\arctan \frac{a}{n^{1/n}} - 1\right]} \end{aligned}$$

dove

$$K_n := \left(1 + \frac{1}{\left[\arctan \frac{a}{n^{1/n}} - 1\right]^{-1}}\right)^{\left[\arctan \frac{a}{n^{1/n}} - 1\right]^{-1}}$$

Poiché $\arctan a = 1$, si ha

(1) $$\lim_{n\to+\infty} K_n = e.$$

Per quanto riguarda l'esponente, osserviamo che

$$n\left[\arctan \frac{a}{n^{1/n}} - 1\right] = \phi(1/n)$$

dove

$$\phi(x) := \frac{\arctan(ax^x) - 1}{x} \qquad (x > 0).$$

Usando il teorema di de l'Hôpital è facile verificare che

$$\lim_{x\to 0+} \phi(x) = -\infty$$

e quindi

(2) $$\lim_{n\to+\infty} \phi(1/n) = -\infty.$$

Da (1) e (2) segue che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(a) = \lim_{n\to+\infty} K_n^{\phi(1/n)} = 0.$$

Ciò evidentemente non garantisce che la serie converga per $x = a$ (caso questo troppo difficile per gli scopi di questo compito e che quindi non porteremo a conclusione). Possiamo invece completare l'esame del caso rimanente, cioè $x = -a$:

- La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(-a)$ converge grazie al criterio di Leibniz, in quanto si ha $f_n(-a) = (-1)^n f_n(a)$ e inoltre la successione $\{f_n(a)\}$ è ovviamente decrescente e (come abbiamo visto) infinitesima.

Convergenza totale. Osserviamo che (per ogni n) la funzione $|f_n|$ è pari. Inoltre $f_n|_{[0,+\infty)}$ è positiva e crescente. Allora:

- Se $r \in (0, a)$, con $a := \arctan 1$, si ha $\|f_n\|_{\infty,[-r,r]} = f_n(r)$, perciò la serie converge totalmente in $C([-r, r])$. Indicata con $S(x)$ la somma in $x \in (-a, a)$, ne segue che $S|_{[-r,r]} \in C([-r, r])$. Per l'arbitrarietà di $r \in (0, a)$, si deduce che S è continua in $(-a, a)$.