

Raccolta di esercizi di  
ANALISI MATEMATICA  
per il Corso di Laurea in Matematica  
a.a. 2017/2018

Silvano Delladio

September 18, 2017

# Chapter 1

## Integrali multipli

### 1.1

Sia  $B \subset \mathbf{R}^3$  la palla di raggio 2 centrata nell'origine e si consideri

$$E := \{(x, y, z) \in B \text{ tali che } z \geq 1\}.$$

Calcolare l'integrale

$$\int_E z \, dx dy dz.$$

[ $9\pi/4$ ]

### 1.2

Sia  $E$  il cono avente per base il disco unitario in  $\mathbf{R}_{xy}^2$  centrato nell'origine e per vertice il punto  $(0, 0, 1)$ . Calcolare

$$\int_E (x^2 + y^2) \, dx dy dz.$$

### 1.3

Si consideri il cilindro

$$E := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, 1]\}$$

e si calcoli

$$\int_E \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \, dx dy dz.$$

## 1.4

Calcolare

$$\int_E y \, dx \, dy \, dz$$

dove  $E$  è il seguente cilindro con basi parallele al piano  $\mathbf{R}_{xz}^2$ :

$$E := \{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}.$$

[ $\pi$ ]

## 1.5

Calcolare il volume della regione compresa fra i piani coordinati e il piano di equazione  $z+x+2y = 2$ .

## 1.6

Calcolare

$$\int_A xy \, dx \, dy$$

dove  $A$  è il quadrilatero di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(2, 1)$ .

[7/12]

## 1.7

Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{y}{x^4} \, dx \, dy$$

dove  $A$  è la regione limitata di piano racchiusa dalle le curve di equazione

$$y = x, \quad y = 2x, \quad y = x^2, \quad y = 2x^2.$$

## 1.8

Si calcoli l'integrale

$$\int_A (x-1)^2 y \, dx \, dy$$

dove

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq 0, x^2 - 2x + \frac{y^2}{4} \leq 0\}.$$

## 1.9

Calcolare l'integrale

$$\int_A x^2 y \, dx dy$$

dove

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \leq -|x|\}.$$

## 1.10

Calcolare

$$\int_A x \, dx dy dz,$$

dove

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}.$$

## 1.11

Calcolare l'area dell'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq y \leq 3x, 1 \leq x + 3y \leq 3\}.$$

## 1.12

Calcolare il volume dell'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, z^2 \leq x^2 + y^2\}.$$

## 1.13

Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{y}{\sqrt{x}} \, dx dy$$

dove

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, 1/x \leq y \leq 2/x, \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}\}.$$

[2/3]

## 1.14

Calcolare l'integrale

$$\int_{CUS} (x^2 + y^2) dx dy dz$$

dove

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 + \sqrt{3(x^2 + y^2)} \leq z \leq 2\}$$

e  $S \subset \mathbf{R}^3$  è la sfera di raggio unitario centrata nel punto  $(0, 0, 1)$ .

## 1.15

Si consideri la seguente curva in  $\mathbf{R}^3$

$$\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = 0, y > 0, y^2 - z^2 = 1\},$$

e sia  $S$  la superficie ottenuta ruotando la curva  $\gamma$  attorno all'asse  $z$ . Chiamiamo  $E$  la regione semplicemente connessa dello spazio delimitata da  $S$ . Posto

$$A = \{(x, y, z) \in E : xy \geq 0, 0 \leq z \leq 1\},$$

si calcoli

$$\int_A \frac{1}{1+z^2} dx dy dz.$$

## 1.16

Si consideri la funzione così definita:

$$f(x, y) := 1 - \frac{x^2}{4} - y^2, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Descrivere l'insieme

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) \geq 0\}$$

e calcolare il volume di

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

### 1.17

Calcolare il volume dell'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

### 1.18

Si consideri il cono

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x^2 + y^2)^{1/2} \leq z \leq 1\}$$

e la palla  $B$  di raggio uno centrata nell'origine. Calcolare il volume di  $C \setminus B$ .

### 1.19

Calcolare l'integrale

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{1 + \frac{y}{2} - (x^2 + y^2)^{1/2}} dx dy dz$$

dove  $\Gamma$  è la regione limitata compresa fra il cono di equazione

$$x^2 + y^2 = z^2$$

e il piano di equazione

$$2z - y = 2.$$

### 1.20

Calcolare l'integrale

$$\int_{\Gamma} (1 + \cos y) dx dy dz$$

dove  $\Gamma$  è la regione di spazio ottenuta facendo ruotare il sottografico della funzione

$$y \mapsto \sin y, \quad y \in [0, \pi]$$

intorno all'asse  $y$ .

$$[\pi^2/2]$$

### 1.21

Siano  $A$  e  $B$ , rispettivamente, il disco di raggio 2 centrato in  $(0, 0)$  e il disco di raggio 1 centrato in  $(1, 0)$ . Calcolare

$$\int_D xy + 1$$

dove  $D := \{(x, y) \in A \setminus B \mid x \geq 0\}$ .

[ $\pi$ ]

### 1.22

Calcolare

$$\int_T x^2 dx dy$$

dove  $T$  è il triangolo del piano di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$ .

[1/4]

### 1.23

Sia  $F$  la regione ottenuta facendo ruotare intorno all'asse  $y$  il triangolo di vertici  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, -2, 2)$  e  $(0, 1, 2)$ . Calcolare

$$\int_F xz dx dy dz.$$

[0]

### 1.24

Calcolare il volume della regione finita di spazio compresa fra il cono di equazione  $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$  e il piano di equazione  $z = 1 + y$ .

[ $\pi\sqrt{2}/3$ ]

## 1.25

Siano  $a, b, h$  numeri reali tali che

$$b \geq a > 0, \quad h > 0.$$

Calcolare il volume della “botte ellissoidale”

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, |z| \leq h \right\}$$

al variare di  $h$ .

$$\left[ \text{Per } h \leq b: \pi a^2 \left( 2h - \frac{2h^3}{3b^2} \right); \quad \text{Per } h > b: \frac{4}{3} \pi a^2 b \right]$$

## 1.26

Sia  $E$  la porzione limitata di spazio compresa fra il cilindro

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

e i piani

$$z = 0, \quad z = y.$$

Calcolare

$$\int_E (y - x) \, dx dy dz.$$

$$[5\pi/4]$$

## 1.27

Calcolare

$$\int_E [(x - y^{1/2}) \ln y + 1] \, dx dy$$

dove

$$E := \{(x, y) \mid y \in [0, 1], x \in [y^{1/2}, 1 + y^{1/2}]\}.$$

$$[1/2]$$



### 1.28

Calcolare

$$\int_E z \, dx dy dz$$

dove

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x, z \geq 0\}.$$

$[\pi/32]$

### 1.29

Calcolare

$$\int_E \ln(1 + x^2 + y^2)^z \, dx dy dz$$

dove

$$E := \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}.$$

$\left[ \pi \left( \frac{5}{2} \ln 5 - \ln 2 - \frac{3}{2} \right) \right]$

### 1.30

Calcolare il volume del solido ottenuto facendo compiere all'insieme

$$D := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0, \sqrt{3}y \leq x, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

una rotazione completa intorno all'asse  $x$ .

$[\frac{7\pi}{12}]$

### 1.31

Posto

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq (1 + xy)^{1/2}\}$$

provare che

$$\int_S (x + y)z \, dx dy dz = 0.$$

### 1.32

Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione, intorno all'asse  $z$ , del triangolo di vertici

$$(0, 0, 0), \quad (0, 2, 0), \quad (0, 1, 1).$$

$$[2\pi]$$

### 1.33

Calcolare il volume dell'insieme

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq |x|, 0 \leq z \leq \frac{x^2 y}{x^2 + y^2 + 1} \right\}.$$

$$\left[ \frac{\pi\sqrt{2}}{24} - \frac{\sqrt{2}}{9} \right]$$

### 1.34

Calcolare

$$\int_{\Pi} z(x^2 + y^2) dx dy dz$$

dove  $\Pi$  è la piramide avente per base il quadrato  $ABCD$  con

$$A = (1, 1, 0) \quad B = (-1, 1, 0) \quad C = (-1, -1, 0) \quad D = (1, -1, 0)$$

e il vertice nel punto  $(0, 0, 1)$ .

$$\left[ \frac{4}{45} \right]$$

### 1.35

Sia  $T$  il triangolo di vertici

$$(1, 0, 0), \quad (3, 0, 0), \quad (2, 0, 1).$$

Calcolare il volume del solido ottenuto facendo compiere a  $T$  una intera rotazione intorno all'asse  $z$ .

$$[4\pi]$$

### 1.36

Calcolare

$$\int_D \frac{1}{2x+y} dx dy$$

dove  $D$  è la regione piana limitata dalle curve

$$y = x, \quad 2y = x, \quad y = -2x^2 + 2x, \quad y = -x^2 + 2x.$$

$$\left[2 \ln \frac{6}{5} - \frac{1}{4}\right]$$

### 1.37

Calcolare

$$\int_E e^{x^2+y^2} dx dy dz$$

dove  $E$  è la regione di spazio ottenuta da una rotazione completa intorno all'asse  $z$  dell'insieme

$$\{(0, y, z) \mid 0 \leq y \leq [\ln(1+z)]^{1/2}, 0 \leq z \leq 1\}.$$

$$\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

### 1.38

Siano:

- $E$  la regione limitata del piano  $yz$  racchiusa dalle curve

$$z = 0, \quad z = y^2, \quad z = 1 - y^2;$$

- $V$  il solido ottenuto facendo ruotare  $E$  intorno all'asse  $z$ .

Calcolare

$$\int_V 2(x^2 + y^2 + z) dx dy dz.$$

$$\left[\frac{\pi}{3}\right]$$

### 1.39

Sia  $V$  il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  ottenuto da una rotazione completa della regione piana

$$\{(0, y, z) \mid 1/2 \leq y \leq 1, 2y^2 \leq z \leq y^2 + 1\}$$

intorno all'asse  $y$ . Calcolare

$$\int_V \frac{y}{(x^2 + z^2)^{1/2}} dx dy dz.$$

$$\left[\frac{9\pi}{32}\right]$$

### 1.40

Sia  $P$  la regione convessa del piano  $yz$  avente per frontiera il poligono di vertici

$$(0, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 2, 2), \quad (0, 0, 1).$$

Calcolare il volume della regione spaziale ottenuta facendo compiere a  $P$  una rotazione completa intorno all'asse  $y$ .

$$\left[\frac{10\pi}{3}\right]$$

### 1.41

Calcolare l'integrale

$$\int_D 1 - x^2 - y^2 dx dy$$

dove  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

$$[\pi/2]$$

### 1.42

Sia  $A$  la regione compatta del piano limitata dalle rette

$$y = x, \quad y = 2x, \quad y + x = 1, \quad y + x = 2.$$

Determinare il volume dell'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A, \quad 0 \leq z \leq (xy)^{-1}\}.$$

$$[\ln^2 2]$$

### 1.43

Sia  $A$  la regione compatta del piano  $yz$  compresa fra l'asse delle  $y$  e la curva  $z = \sin y$ , con  $0 \leq y \leq 2\pi$ . Calcolare il volume del solido ottenuto da una rotazione completa di  $A$  intorno all'asse  $z$ .

[ $8\pi^2$ ]

### 1.44

Sia

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - y^2\}.$$

Calcolare il volume della porzione di  $B$  compresa fra i piani di equazioni  $x = 0$  e  $y = x$ .

[ $1/2$ ]

### 1.45

Sia  $\Gamma$  il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  ottenuto da una rotazione completa del triangolo di vertici

$$(0, 1, 0), \quad (0, 2, 0), \quad (0, 1, 1)$$

intorno all'asse  $z$ . Calcolare

$$\int_{\Gamma} z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz.$$

[ $8\pi/15$ ]

### 1.46

Sia  $D$  la regione connessa e limitata del primo quadrante di  $\mathbb{R}^2$  compresa fra le rette  $y = x/\sqrt{3}$ ,  $y = x\sqrt{3}$  e le circonferenze  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$ . Sia inoltre  $S$  il grafico di

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2, \quad (x, y) \in D.$$

Calcolare

$$\int_S \frac{(x+y)z}{(1+4z)^{1/2}} \, d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

[ $31(\sqrt{3} - 1)/5$ ]

### 1.47

Sia  $V$  la regione di spazio ottenuta da una rotazione completa intorno all'asse  $z$  dell'insieme

$$\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in [0, 1], \sqrt{y} \leq z \leq 2 - y\}.$$

Calcolare

$$\int_V 2z \, dx dy dz.$$

[ $7\pi/6$ ]

### 1.48

Calcolare

$$\int_E (1 - z)(x^2 + y^2)^{1/2} \, dx dy dz$$

dove  $E$  è la regione di spazio ottenuta da una rotazione completa intorno all'asse  $z$  dell'insieme

$$\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq (1 - z)^2, 0 \leq z \leq 1\}.$$

[ $\pi/12$ ]

### 1.49

Calcolare il volume della regione

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq y \leq \ln(x^2 + z^2)\}.$$

[ $\pi(8 \ln 2 - 3)$ ]

### 1.50

Siano  $A$  e  $B$ , rispettivamente, il disco di raggio 2 centrato nell'origine e il disco di raggio 1 centrato in  $(1, 0)$ . Calcolare

$$\int_T (x^2 + y^2)^{-1/2} \, dx dy$$

dove

$$T := \{(x, y) \in A - B \mid 0 \leq y \leq x\sqrt{3}\}.$$

[ $2\pi/3 - \sqrt{3}$ ]

### 1.51

Sia  $C$  il cono avente per base il disco di raggio 2 centrato nell'origine e contenuto nel piano  $xy$  e per vertice il punto  $(0, 0, 2)$ . Posto

$$T := \{(x, y, z) \in C \mid 0 \leq z \leq 1\}$$

calcolare

$$\int_T \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{(2 - z)^2} dx dy dz.$$

$[\pi]$

### 1.52

Se  $z \in \mathbb{R}$ , indichiamo con  $D_z$  il disco unitario centrato in  $(0, z, z)$  e parallelo al piano  $xy$ . Posto

$$\Gamma := \bigcup_{z \in [0, 1]} D_z$$

calcolare

$$\int_{\Gamma} 4 [(y - z)^2 + x^2] dx dy dz.$$

$[2\pi]$

### 1.53

Sia  $F$  la regione limitata del primo quadrante del piano  $yz$  racchiusa dalle curve

$$z = y^2, \quad y = z^2.$$

Calcolare

$$\int_V |xz| dx dy dz$$

dove  $V$  è ottenuto dalla rotazione di  $F$  intorno all'asse  $y$ .

$[1/9]$

### 1.54

Calcolare

$$\int_E z \sin(xy) \, dx dy dz$$

dove

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in [-1, 1], x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

[0]

### 1.55

Calcolare

$$\int_E \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \, dx dy$$

dove

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$[2 - \pi/2]$

### 1.56

Si considerino, nel piano  $xy$  di  $\mathbb{R}^3$ , due dischi di raggio 2 centrati rispettivamente in  $(0, -1, 0)$  e  $(0, 1, 0)$ . Indichiamo con  $E$  la regione ottenuta da una rotazione completa dell'unione di questi due dischi intorno all'asse  $y$ . Calcolare

$$\int_E 2|y| \, dx dy dz.$$

$[45\pi]$

### 1.57

Si calcoli

$$\int_E \frac{2y}{x} \, dx dy$$

dove  $E$  è la regione compatta del semipiano  $x > 1$  limitata dalle curve

$$y = \ln x, \quad y = 2 \ln x, \quad y \ln x = 1, \quad y \ln x = 2.$$

$[20/3 - 4\sqrt{2}]$



### 1.58

Sia  $E$  la regione compatta racchiusa dal paraboloido  $\Pi_1$  di equazione  $z = x^2 + y^2$  e dal paraboloido  $\Pi_2$  di equazione  $z = 1 - (x - 1)^2 - y^2$ . Si usi il teorema della divergenza per calcolare il flusso del campo di vettori

$$F(x, y, z) := \left( xy, x - \frac{y^2}{2}, z \right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

uscite dalla frontiera di  $E$ .

[ $\pi/16$ ]

### 1.59

Per  $t \in (0, 1)$ , si consideri l'insieme

$$E_t := \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 - \frac{x^2}{t^2} - \frac{y^2}{(1-t)^2} \right\}.$$

Disegnare il grafico della funzione  $t \rightarrow m_3(E_t)$  e determinare per quale valore di  $t$  tale funzione raggiunge il suo massimo.

[1/2]

### 1.60

Si considerino

$$\Gamma_0 := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

e

$$\Gamma_1 := \{(x, y, z) \mid (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Calcolare il volume della regione formata dai punti di  $\Gamma_1$  che non appartengono a  $\Gamma_0$ .

[ $\pi/3 + \sqrt{3}/2$ ]

### 1.61

Siano  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_1$ , rispettivamente, la sfera di raggio 2 centrata nell'origine e la sfera di raggio 1 centrata in  $(0, 2, 0)$ . Calcolare il volume di  $\Sigma_0 \cap \Sigma_1$ .

[ $13\pi/24$ ]

## 1.62

Sia  $E$  il solido ottenuto da una rotazione completa della regione piana

$$\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

intorno all'asse delle  $x$ . Calcolare

$$\int_E \frac{yz}{(1+x)^\pi} + 1 \, dx dy dz.$$

$[\pi/3]$

## 1.63

Posto

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad E := \{(x, y, z) \in C \mid y \leq z \leq y + 1\}$$

si svolgano i seguenti punti:

- (i) Calcolare  $\mathcal{L}^3(E)$ ;
- (ii) Servirsi del risultato ottenuto in (i) e del teorema della divergenza per calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := (x, -y, z)$$

attraverso  $\partial C \cap \partial E$  orientata dal campo normale esterno a  $E$ .

$[\pi; 0]$

## 1.64

Per  $t \in (0, 1]$ , sia  $E_t$  l'insieme dei punti  $(x, y)$  soddisfacenti la disequazione

$$x^2 + \frac{y^2}{t^2} \leq 1$$

e sia  $V_t$  il solido ottenuto da una rotazione completa di  $E_t$  intorno all'asse  $x$ . Rappresentare graficamente l'insieme  $E_t$ , calcolare esplicitamente il numero  $\mathcal{L}^3(V_t)$  e disegnare il grafico della funzione  $t \mapsto \mathcal{L}^3(V_t)$  per  $t \in (0, 1]$ .

$[4\pi t^2/3]$

### 1.65

Calcolare

$$\int_E (x^2 + y)z \, dx dy dz$$

dove  $E$  è l'insieme ottenuto da una rotazione completa di

$$\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{y}\}$$

intorno all'asse delle  $z$ .

$[\pi/10]$

### 1.66

Calcolare  $\mathcal{L}^3(E)$ , dove

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y \leq x\sqrt{3}, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}.$$

$[\pi/48]$

### 1.67

Calcolare

$$\int_{\Gamma} (x^2 + y^2 - 2y)e^z \, d\mathcal{L}^3(x, y, z)$$

dove

$$\Gamma := \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + (y - 1)^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}.$$

$[9(e^2 - 1)\pi/2]$

### 1.68

Calcolare

$$\int_E ye^x \, dx dy$$

dove  $E$  indica la regione limitata del piano racchiusa dalle curve

$$y = e^x, \quad y = 2e^x, \quad y = e^{-x}, \quad y = 3e^{-x}.$$

$[2(2^{1/2} - 1)(3^{3/2} - 1)/3]$

### 1.69

Calcolare

$$\int_E 2(y-x)(2x+1) d\mathcal{L}^2(x,y)$$

dove  $E$  è il sottoinsieme compatto del primo quadrante del piano cartesiano racchiuso dalle curve

$$y = x, \quad y = x + 1, \quad y = 2 - x^2, \quad y = 3 - x^2.$$

[1]

### 1.70

Siano  $A$  e  $B$ , rispettivamente, il disco di raggio 1 centrato in  $(1,0)$  e il disco di raggio  $1/2$  centrato in  $(1/2,0)$ . Calcolare

$$\int_{A \setminus B} x + \sin(xy) d\mathcal{L}^2(x,y).$$

$[7\pi/8]$

### 1.71

Calcolare il volume dell'insieme

$$E := \{(x, y, z) \in P \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

dove  $P$  è la piramide avente come vertici i punti

$$(-1, -1, 0), \quad (1, -1, 0), \quad (1, 1, 0), \quad (-1, 1, 0), \quad (0, 0, 1).$$

$[\pi - \frac{4\sqrt{2}}{3}]$

### 1.72

Calcolare l'integrale

$$\int_A x dx dy$$

dove  $A$  è la regione piana compatta racchiusa dalle curve

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y = x, \quad x = 1.$$

$$\left[ \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

### 1.73

Calcolare

$$\int_C z \, dx \, dy \, dz$$

dove  $C$  è il cono avente per base l'ellisse

$$\{(x, y, 0) \mid x^2/4 + y^2 \leq 1\}$$

e il vertice in  $(0, 0, 1)$ .

$$[\pi/6]$$

### 1.74

Calcolare

$$\int_A \frac{1}{xy^2} \, dx \, dy$$

dove  $A$  è la regione limitata del piano compresa fra le rette

$$y = x, \quad y = 2x, \quad y = 1 - x, \quad y = 2 - 2x.$$

$$\left[ \frac{\ln 2}{2} \right]$$

### 1.75

Calcolare

$$\int_A 4(x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

dove  $A$  è la regione limitata del piano racchiusa dalle rette

$$y = x - 2, \quad y = x + 2, \quad y = -x - 1, \quad y = -x + 1.$$

$$[40/3]$$

### 1.76

Calcolare

$$\int_E x^2 y \, dx dy dz$$

dove

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x^2, z \in [0, 1]\}.$$

$$\left[ \frac{a^3}{3} - \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} \text{ con } a := \left( \frac{5^{1/2}-1}{2} \right)^{1/2} \right]$$

### 1.77

Calcolare

$$\int_E x^2 y \, dx dy$$

dove

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq x, x \leq 2\}.$$

$$\left[ \frac{47}{15} + \frac{\sqrt{2}}{60} \right]$$

## Chapter 2

# Vettori e campi vettoriali

### 2.1

Disegnare i (grafici dei) seguenti campi di vettori, dopo averne determinato i corrispondenti domini:

$$\varphi(x, y) = (xy, x/y), \quad \varphi(x, y) = (\sqrt{x+y-2}, 0), \quad \varphi(x, y) = (x, x^2 - y).$$

### 2.2

Dati i vettori

$$v_1 = (1, -2), \quad v_2 = (-3, 0), \quad v_3 = (-1, 4)$$

determinare  $v_1 + v_2 - v_3$ ,  $3v_1 - 2v_2 + v_3$ ,  $|5v_1|$ ,  $|v_1 - v_2|$ . Determinare inoltre il vettore  $v$  tale che  $v_1 - 3v = 2v_2$ .

### 2.3

Stabilire se i punti delle seguenti terne sono allineati:

$$\{(1, 3); (2, 5); (3, 10)\}, \quad \{(0, 0, 0); (2, 2, 0), (-1, -1, 0)\}.$$

### 2.4

Determinare, nei seguenti due casi, l'angolo compreso fra i vettori  $v$  e  $w$ :

$$v = (1, -1, -1), \quad w = (2, 1, 1) \quad \text{e} \quad v = (1, -2, 2), \quad w = (2, 3, -6)$$

## 2.5

Con riferimento all'esercizio 2.4, trovare (nei due casi) un vettore perpendicolare a  $v$  e a  $w$ .



## Chapter 3

# Curve e superfici

### 3.1

Determinare il piano passante per l'origine e perpendicolare alla retta parametrizzata da  $v(t) = t(1, -1, 5)$ .

### 3.2

Trovare la retta tangente alla curva parametrizzata da  $v(t)$  nel punto  $P$ :

$$v(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t, \sin t \cos t), P = v(\pi/3); \quad v(t) = (t, t^2, t^3), P = (1, 1, 1).$$

### 3.3

Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $P_0$ :

$$f(x, y) = 2x^2y + y^2 + 3, P_0 = (1, 1, 6); \quad f(x, y) = e^{x^2y} + \sin(xy), P_0 = (0, 0, 1).$$

## Chapter 4

# Integrali su curve e superfici

### 4.1

Calcolare l'integrale di linea lungo le seguenti curve  $C$  del campo vettoriale  $v(x, y) = (\sin x \cos y, e^{xy})$ :

$$C : 0 \leq x \leq \pi, y = \frac{\pi}{3}; \quad C : 0 \leq y \leq 1, x = 2.$$

### 4.2

Calcolare l'integrale di linea lungo le seguenti curve  $C$  del campo vettoriale  $v(x, y) = (-y, x)$ :

$$C : y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad C : y = x^{1/3}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

### 4.3

Calcolare la lunghezza del bordo di  $G_f$ , dove

$$f(x, y) : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) := x^2 - xy.$$

### 4.4

Calcolare l'area del quadrilatero ottenuto intersecando il piano di equazione  $z - 2y + 3x = 10$  col cilindro a sezione quadrata  $[0, 1] \times [0, 1] \times \mathbf{R}$ .

## 4.5

Consideriamo l'ellisse  $E$  di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e il campo vettoriale in  $\mathbf{R}^2$

$$F(x, y) := (-y, x).$$

Calcolare

$$\int_E F \bullet ds$$

(suggerimento: usare la parametrizzazione  $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi)$ ). Servirsi poi del teorema di Green per calcolare  $\text{mis}(E)$ .

## 4.6

Se  $D$  è il disco di raggio 1 centrato in  $(0, 0)$ , sia

$$f : D \rightarrow \mathbf{R}$$

la funzione definita da  $f(x, y) := xy + 1$ . Si consideri anche il campo di vettori

$$F(x, y, z) := (-y, x, z).$$

- Calcolare

$$\int_D f(x, y) \, dx dy.$$

- Ricavare l'espressione in coordinate cartesiane di un campo regolare di vettori normali al grafico  $G_f$ .
- Calcolare  $\text{rot } F$ .
- Servirsi del teorema di Stokes e dei due punti precedenti per valutare l'integrale

$$\int_{G_f} \frac{2}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dS.$$

$[\pi; (-y, -x, 1)/\sqrt{1+x^2+y^2}; \text{rot } F = (0, 0, 2); 2\pi]$

## 4.7

Calcolare l'area della porzione di paraboloido  $z = x^2 + y^2$  compresa tra i cilindri di equazioni  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 2$ .

## 4.8

Per ogni  $n \in \mathbf{N}$ , sia  $\gamma_n$  il grafico della funzione  $g_n : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}$  così definita:

$$g_n(t) := \begin{cases} nt & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ n & \text{se } 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Si calcoli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} e^{-3x-y}.$$

## 4.9

Dati la superficie

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$$

(orientata a piacere) e il campo di vettori

$$F(x, y, z) := (e^{-z^2}, e^{-z^2}, 0),$$

calcolare

$$\int_C F \bullet dS.$$

[0]

## 4.10

Sia  $F(x, y, z) := (2y, -x, -x)$  e  $C$  la circonferenza unitaria nel piano di equazione  $z = y$  (centrata nell'origine). Calcolare il lavoro compiuto da  $F$  lungo  $C$  orientata a piacere.

## 4.11

Considerato l'insieme

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ e } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

calcolare il seguente integrale applicando il teorema di Green

$$\int_{\partial\Omega} -y dx + \ln(x^2 + y^2) dy = \int_{\partial\Omega} (-y, \ln(x^2 + y^2)) \bullet ds.$$

## 4.12

Sia  $C$  la superficie ottenuta ruotando il grafico della funzione  $y \mapsto 2|y|$  attorno all'asse  $z$ . Posto

$$T := \{(x, y, z) \in C \mid 1 \leq z \leq 2\},$$

calcolare l'integrale

$$\int_T z \, dS.$$

$[7\pi\sqrt{5}/6]$

## 4.13

Si consideri la superficie

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2, y < 1\}$$

orientata in modo tale che il suo vettore normale nel punto  $(0, 0, \sqrt{2})$  coincida con  $(0, 0, 1)$ . Posto

$$F(x, y, z) := (xy, (y-1)e^{z^2} \cosh x, yz), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

si calcoli

$$\int_S \operatorname{rot} F \bullet dS.$$

Quanto vale tale integrale se si sceglie per  $S$  l'altra possibile orientazione?

$[0]$

## 4.14

Sia  $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  definito da

$$F(x, y) := (x \arctan y, x), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

e sia  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$ . Si calcoli

$$\int_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

## 4.15

Calcolare l'area della superficie ottenuta ruotando la curva

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y \in [0, 1], x = 0, z = 1 - y^2\}$$

intorno all'asse  $y$ .

### 4.16

Sia  $D \subset \mathbf{R}^2$  il disco unitario centrato in 0 e

$$f(x, y) := 1 + (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad (x, y) \in D.$$

Calcolare

$$\int_{G_f} \cos(z - 1)^2 dS$$

dove  $G_f$  è il grafico di  $f$ .

### 4.17

Si consideri il cilindro avente raggio 1 e asse coincidente con l'asse delle  $x$ . Calcolare l'area delle regioni limitate e connesse di tale cilindro, ottenute sezionandolo coi piani

$$y = x, \quad y = -x.$$

[4; 4]

### 4.18

Indicato con  $G$  il grafico della funzione

$$(x, y) \mapsto \frac{\varepsilon}{2}(x^2 + y^2), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad (\varepsilon > 0)$$

si calcoli l'area della regione di  $G$  contenuta nel cilindro di equazione  $x^2 + y^2 = 1$ . Calcolare il limite di quest'area, per  $\varepsilon \downarrow 0$  (se lo si preferisce, ci si avvalga di un argomento intuitivo).

$[\frac{2\pi}{3\varepsilon^2} ((\varepsilon^2 + 1)^{3/2} - 1); \pi]$

### 4.19

Il grafico della funzione

$$(x, y) \mapsto x^2 + 4y^2$$

divide il piano di equazione

$$z = 2x + 8y - 1$$

in due regioni, di cui una finita. Calcolare l'area di quest'ultima.

$[2\pi\sqrt{69}]$

## 4.20

Calcolare l'area della regione costituita dai punti del piano

$$z = \sqrt{5}y$$

interni all'ellissoide

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1.$$

$$[2\pi\sqrt{6}]$$

## 4.21

Sia  $P$  il parallelogramma nel piano di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$  e poniamo

$$S := \{(x, y, x^2 + y^2) \mid (x, y) \in P\}.$$

Calcolare

$$\int_S \frac{xy}{\sqrt{1+4z}} d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

$$\left[\frac{7}{12}\right]$$

## 4.22

Sia  $\Sigma$  l'arco di elica parametrizzato da

$$t \mapsto (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

e si consideri il campo di vettori

$$F(x, y, z) := (2xz, 2yz, x^2 + y^2), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Calcolare  $\int_{\Sigma} F$ .

$$[2\pi]$$

## 4.23

Indicata con  $C$  la curva ottenuta dall'intersezione del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  con il piano  $x + y = z$ , si calcoli

$$\int_C \sqrt{3(x^2 + y^2) - z^2} d\mathcal{H}^1.$$

[4 $\pi$ ]

## 4.24

Posto

$$S_\varepsilon := \{(x, y, \ln(x^2 + y^2)^{1/2}) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2, \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\} \quad (\varepsilon > 0)$$

calcolare

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} d\mathcal{H}^2.$$

[2 $\pi$ ]

## 4.25

Sia  $C$  l'ellisse ottenuta intersecando il cilindro di equazione  $x^2 + y^2 = 1$  con il piano di equazione  $z = x$ . Calcolare

$$\int_C (1 + y^2)^{1/2} ds.$$

[3 $\pi$ ]

## 4.26

Sia  $S$  il grafico della funzione

$$T \ni (x, y) \mapsto e^{3x+4y}$$

dove  $T$  è il triangolo piano di vertici  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(0, 3)$ . Calcolare

$$\int_S (1 + 25z^2)^{1/2} d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

$$\left[ \frac{313}{48} + \frac{575}{48} e^{24} \right]$$

## 4.27

Sia  $E$  la porzione limitata di spazio compresa fra il cilindro

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$



e i piani

$$z = 0, \quad z = y.$$

Calcolare il flusso uscente da  $E$  del campo vettoriale  $(x, y, z) \mapsto (z - y, zx - yx, zy - y^2)$ . Come si spiega l'uguaglianza fra questo risultato e quello dell'esercizio 1.26 ?

[ $5\pi/4$ ]

## 4.28

Si consideri la funzione

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{x - y}{2(x + y)}$$

dove  $D$  è il parallelogramma di vertici  $(2, 1)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(4, 2)$  e  $(3, 2)$ . Calcolare

$$\int_{G_f} \frac{(x - y)^3 z^{-2}}{\sqrt{(x + y)^4 + x^2 + y^2}} dS.$$

[6]

## 4.29

Si consideri la superficie

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, z \leq 1\}$$

e il campo di vettori

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (y, -x, x + y + z).$$

Verificare che vale il Teorema di Stokes (comunque si orienti  $S$ )

$$\int_{\bar{S}} \operatorname{rot} F = \int_{\partial \bar{S}} F.$$

[Entrambi gli integrali valgono  $\pm 2\pi$ ]

## 4.30

Si considerino: il cilindro

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\},$$

il campo normale “esterno” a  $C$

$$N : C \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad N(x, y, z) := (x, y, 0)$$

e infine un campo vettoriale  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , di classe  $C^1$ , della forma

$$F(x, y, z) := (a(x, y), b(x, y), c(x, y, z)).$$

Verificare che, in questa situazione, la formula di Stokes

$$\int_{\partial(C,N)} F = \int_{(C,N)} \operatorname{rot} F$$

si riduce all’uguaglianza

$$\int_C x \frac{\partial c}{\partial y} - y \frac{\partial c}{\partial x} = 0.$$

### 4.31

Si consideri il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (0, x)$$

e la regione limitata  $E$  racchiusa dalle curve di equazione

$$y = 0, \quad x + y = 2, \quad y = x^2 \ (x \geq 0).$$

Calcolare

$$\int_{\partial E} F$$

e mostrare che il risultato trovato coincide con l’area di  $E$ .

[ $\frac{5}{6}$ ]

### 4.32

Si considerino il quadrato  $Q$  di vertici

$$(0, 0, 0) \quad (1, 0, 0) \quad (1, 1, 0) \quad (0, 1, 0)$$

e il campo di vettori

$$F(x, y, z) := (y(z + 1), x^2(1 - z^2), \ln(1 + x^2y^2z^4)), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Usare il Teorema di Stokes per calcolare l’integrale di  $F$  lungo  $\partial Q$ , con l’orientazione indotta dall’elenco dei vertici di cui sopra.

[0]

### 4.33

Sia  $T$  il triangolo di vertici

$$(1, 0, 0), \quad (3, 0, 0), \quad (2, 0, 1).$$

Calcolare l'area della superficie del solido ottenuto facendo compiere a  $T$  una intera rotazione intorno all'asse  $z$ .

$$[8\pi(1 + \sqrt{2})]$$

### 4.34

Un piano  $\Pi$ , coincidente all'istante iniziale ( $t = 0$ ) con il piano  $xz$ , ruota intorno all'asse  $z$  con velocità angolare unitaria. Si considerino i due punti  $A$  e  $B$  in  $\Pi$  che, per  $t = 0$ , occupano le posizioni  $(1, 0, 0)$  e  $(2, 0, 1)$  rispettivamente. Supponiamo che il punto  $P \in \Pi$  percorra il segmento  $AB$  con velocità costante dalla posizione iniziale  $A$  (per  $t = 0$ ) alla posizione finale  $B$  (per  $t = 2\pi$ ). Determinare la posizione  $\gamma(t)$  occupata da  $P$  all'istante  $t$ . Calcolare inoltre la lunghezza della traiettoria compiuta da  $P$  (per  $0 \leq t \leq 2\pi$ ).

$$\left[ \left( \frac{x^2}{8} + \ln x - \frac{1}{2x^2} \right) \frac{\sqrt{4\pi^2+2}-2\pi}{\sqrt{16\pi^2+2}-4\pi} \right]$$

### 4.35

Sia  $C$  la semicirconferenza orientata nel quadrante piano

$$\{(0, y, z) \mid y \geq 0, z \geq 0\}$$

avente l'origine come punto iniziale e  $(0, 0, 2)$  come punto finale. Calcolare

$$\int_C F$$

dove  $F$  è il campo vettoriale definito nell'esercizio 5.25.

$$\left[ \frac{8}{3} \right]$$

### 4.36

Sia  $C$  una curva piana regolare e sia

$$S := C \times [a, b] = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in C, z \in [a, b]\}.$$

Dimostrare che  $\mathcal{H}^2(S) = (b - a)\mathcal{H}^1(C)$ .

### 4.37

Sia  $P$  la regione convessa del piano  $yz$  avente per frontiera il poligono di vertici

$$(0, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 2, 2), \quad (0, 0, 1).$$

Calcolare

$$\int_{\partial P} (0, -z, y)$$

dove l'orientazione scelta per  $\partial P$  è quella indotta dall'ordine in cui sono stati elencati i suoi vertici.

[4]

### 4.38

Calcolare l'area della superficie

$$\{(x, y, x^2 - y^2) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$[\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)]$

### 4.39

Sia  $A$  la regione compatta del piano limitata dalle rette

$$y = 0, \quad y = x, \quad y + x = 1, \quad y + x = 2$$

e sia  $S$  il grafico della funzione

$$A \rightarrow \mathbf{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y.$$

Calcolare

$$\int_S (x + y)z \, d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

$[\frac{15\sqrt{3}}{8}]$

### 4.40

Sia  $\Gamma$  l'insieme definito nell'esercizio 1.45 e sia

$$S := \{(x, y, z) \in \partial\Gamma \mid x^2 + y^2 > 1, z > 0\}.$$

Calcolare

$$\int_S z \, d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

$[4\pi\sqrt{2}/3]$

#### 4.41

Sia  $\overline{G}$  il grafico della funzione

$$(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2), \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

orientato dal campo normale avente la terza componente positiva. Calcolare

$$\int_{\partial\overline{G}} (-y, x, \sin(xy))$$

$[6\pi]$

#### 4.42

Sia  $\overline{C}$  la curva orientata avente come luogo

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x \geq 0, x^2 + z^2 = 1\}$$

percorsa nel senso in cui  $z$  cresce. Calcolare l'integrale

$$\int_{\overline{C}} (-z, z(x+y), x).$$

$[\pi]$

#### 4.43

Calcolare l'area della superficie ottenuta ruotando intorno all'asse  $y$  la curva del piano  $yz$  di equazione  $z = y^2$  con  $y \in [0, 1]$ .

#### 4.44

Sia  $S_\theta$  la superficie ottenuta da una rotazione completa intorno all'asse  $y$  del segmento di estremi

$$(0, 0, 1), \quad (0, \cos \theta, 1 + \sin \theta).$$

Calcolare  $\mathcal{H}^2(S_\theta)$  e disegnare il grafico di  $\theta \mapsto \mathcal{H}^2(S_\theta)$ , con  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

$$[\pi(2 + \sin \theta)]$$

#### 4.45

Calcolare  $\mathcal{H}^2(\partial E)$ , dove  $E$  è il solido definito nell'esercizio 5.33.

#### 4.46

Calcolare l'integrale di superficie

$$\int_S (x + y - z) d\mathcal{H}^2(x, y, z)$$

dove

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1, z = y\}.$$

$$[0]$$

#### 4.47

Calcolare l'area della regione compatta del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  racchiusa dal segmento  $\{(1, 0)\} \times [1, 2]$  e dalle due eliche

$$t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t), \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 2t)$$

con  $t \in [0, 1]$ .

$$[\pi]$$

#### 4.48

Sia  $\Gamma$  il cono di equazione  $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$  e sia  $S$  la spirale parametrizzata da

$$\gamma(t) := (t \cos t, t \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Sia inoltre  $C$  la curva regolare inclusa in  $\Gamma$  e tale che  $S$  coincide con la proiezione ortogonale di  $C$  in  $\mathbb{R}_{xy}^2$ . Calcolare

$$\int_C (2 + z^2)^{-1/2} d\mathcal{H}^1(x, y, z).$$

[ $2\pi$ ]

#### 4.49

Siano  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  i paraboloidi definiti nell'esercizio 1.58. Calcolare

$$\int_{\Pi_1 \cap \Pi_2} (1 + 4y^2 + x - z)^{1/2} d\mathcal{H}^1(x, y, z).$$

[ $3\pi/2$ ]

#### 4.50

Sia  $S$  il sottoinsieme limitato del paraboloide  $z = x^2 + y^2$  compreso fra i piani di equazioni  $z = 2y$  e  $z = 4y$ . Calcolare poi l'integrale

$$\int_S (1 + 4x^2 + 4y^2)^{-1/2} d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

[ $3\pi$ ]

#### 4.51

Si considerino le sfere  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_1$  dell'esercizio 1.61. Calcolare l'area di  $\Sigma_1 \cap \partial\Sigma_0$ .

[ $\pi$ ]

#### 4.52

Per  $\varepsilon > 0$ , definiamo  $C_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$  e indichiamo con  $S_\varepsilon$  il grafico della funzione

$$f_\varepsilon : C_\varepsilon \rightarrow (0, +\infty), \quad f_\varepsilon(x, y) := (x^2 + y^2)^{-1/4}.$$

Provare che

$$\mathcal{H}^2(S_\varepsilon) \leq (3 - \varepsilon^{1/2})\pi.$$

### 4.53

Calcolare

$$\int_{(\partial S, \tau)} F$$

dove:

- (i)  $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid 0 \leq y \leq x, z \geq 0\}$ ;
- (ii)  $\tau$  è un campo unitario tangente a  $\partial S$ , scelto arbitrariamente fra quelli continui nelle parti interne dei tratti regolari;
- (iii)  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F(x, y, z) := (yz, yz, yz)$ .

$$\left[\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}\right]$$

### 4.54

Calcolare

$$\int_{\Gamma} \sqrt{2y(x^2 + z^2)} d\mathcal{H}^1(x, y, z)$$

dove  $\Gamma$  è la curva ottenuta dall'intersezione del cilindro  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  col cono  $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ .

$$[5\pi]$$

### 4.55

Si consideri la curva regolare orientata  $(C, \tau)$ , dove

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 1)^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2\}$$

e l'orientazione  $\tau$  è scelta a piacere fra le due possibili. Calcolare

$$\int_{(C, \tau)} (\ln(2x - z + 1), x + y - 1, -yz/4).$$

$$[2\pi]$$



## 4.56

Sia  $E$  la regione compatta del piano racchiusa dalle curve

$$y = x^2, \quad y = 2x^2, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{2x}.$$

e sia  $F : E \rightarrow \mathbb{R}^2$  il campo di vettori definito come segue

$$F(x, y) := \left( \ln x, \frac{3}{2}x^2 + \sin y \right).$$

Usare il teorema di Green per calcolare

$$\int_{(\partial E, \tau_E)} F$$

dove  $\tau_E$  indica l'orientazione positiva di  $\partial E$ .

$$[9(16^{1/3} - 1)(1 - 32^{-1/3})/20]$$

## 4.57

Si consideri la superficie

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, z = 1 - y\}$$

e il campo di vettori  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  così definito

$$F(x, y, z) := \left( \frac{y^2}{2} + z, xy, \sin(y + z) \right).$$

Scelta a piacimento l'orientazione  $\tau$  di  $\partial S$ , calcolare

$$\int_{(\partial S, \tau)} F$$

servendosi del teorema di Stokes.

$$[\pi/2]$$

## 4.58

Calcolare

$$\int_S \frac{x^2 + y^2}{e^z} d\mathcal{H}^2(x, y, z)$$

dove  $S$  è la superficie ottenuta facendo ruotare la curva  $\{(0, y, \ln y) \mid y \in [1, 2]\}$  intorno all'asse  $z$ .

$$[2\pi(5^{3/2} - 2^{3/2})/3]$$

### 4.59

Sia  $S$  la superficie ottenuta facendo ruotare l'insieme

$$\{(0, y, \cos y) \mid y \in [0, \pi/2]\}$$

intorno all'asse  $z$ . Provare che la funzione

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2 - z^2}}, \quad (x, y, z) \in S$$

è limitata e calcolare

$$\int_S \frac{1}{\sqrt{2 - z^2}} d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

$[\pi^3/4]$

### 4.60

Calcolare

$$\int_C \frac{(5 - x^2 - 4y^2)z}{(3y^2 + 10)^{1/2}} d\mathcal{H}^1(x, y, z)$$

dove  $C$  è l'elica ellittica parametrizzata da

$$\gamma(t) := (2 \cos t, \sin t, 3t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

$[6\pi^2]$

### 4.61

Indicato con  $S$  il paraboloido di equazione  $z = x^2 + y^2$ , consideriamo la curva

$$\Gamma := \{(x, y, z) \in S \mid (x, y) \in [A; B]\}$$

dove  $A := (1, 0)$  e  $B = (0, 1)$ . Calcolare

$$\int_{(\Gamma, \tau)} (2z, x, y)$$

dove  $\tau$  è un campo vettoriale unitario tangente a  $\Gamma$ , scelto a piacimento.

$[\pm 1/2]$

## 4.62

Si consideri la calotta parabolica ottenuta facendo ruotare la curva

$$\{(0, y, z) \mid z = 1 - y^2, y \in [0, 1]\}$$

intorno all'asse  $z$ . Calcolare il valore di  $q$  per il quale il piano  $z = q$  divide la calotta in due superfici di area uguale.

$$[q = \frac{1}{4}(5 - (\frac{1+5^{3/2}}{2})^{2/3})]$$

## 4.63

Calcolare l'integrale

$$\int_{\partial S} xyz \, d\mathcal{H}^1$$

dove

$$S := \{(x, y, x^2 - y^2) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

[0]

## 4.64

Calcolare

$$\int_{\bar{S}} \left( \frac{y}{x}, \ln \frac{x}{y}, x - y + z \right)$$

dove  $\bar{S}$  è il segmento orientato di punto iniziale  $(1, 1, 2)$  e di punto finale  $(3, 3, 0)$ .

[0]

## Chapter 5

# Flusso di un campo vettoriale

### 5.1

Si consideri il semidisco

$$D := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

e si indichi con  $E$  il sottografico della funzione  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x, y) := y.$$

Sia inoltre dato il seguente campo di vettori

$$F(x, y, z) := (0, 1 - x^2 - y^2, -y).$$

Calcolare allora i seguenti due flussi (uscenti da  $E$ ) di  $F$ :

- quello attraverso la “superficie laterale”, cioè la parte di  $\partial E$  che giace parallela all’asse  $z$ ;
- quello attraverso la “base”  $D$ .

Infine, usando il teorema di Gauss della divergenza, determinare il flusso ascendente di  $F$  attraverso il grafico di  $f$ .

### 5.2

Sia  $B \subset \mathbf{R}^2$  il disco di raggio 1 centrato in  $(0, 1)$ . Si consideri inoltre la funzione  $f : B \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x, y) := x^2 + y^2 + 1$$

e si denoti con  $E$  il suo grafico. Allora:

- calcolare l'integrale di superficie

$$\int_E \frac{y^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS;$$

- assumendo  $\partial E$  orientata compatibilmente con la direzione positiva dell'asse  $z$ , calcolare

$$\int_{\partial E} F \bullet ds$$

dove  $F(x, y, z) := (z, xy^2, x)$ .

Come si può giustificare l'uguaglianza di questi due integrali?

### 5.3

Sia  $D \subset \mathbf{R}^2$  il disco di raggio 1 centrato nell'origine e consideriamo la funzione  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x, y) := 1 - (x^2 + y^2) = 1 - x^2 - y^2.$$

Sia inoltre  $F$  il campo vettoriale in  $\mathbf{R}^3$  dato da

$$F(x, y, z) := (x, 0, 0).$$

Affrontare le seguenti questioni:

- calcolare il flusso  $\Phi$  di  $F$  attraverso il grafico di  $f$  (orientato dal campo delle normali aventi la terza componente positiva);
- calcolare la misura  $\mu$  del sottografico di  $f$ ;
- utilizzare il teorema della divergenza di Gauss per spiegare l'apparente coincidenza  $\Phi = \mu$ .

### 5.4

Si consideri la funzione

$$f(x, y) : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) := x^2 - xy$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (1, 0, x).$$

Denotata con  $G_f$  la superficie data dal grafico di  $f$  e scelta per essa l'orientazione corrispondente al campo normale avente la terza componente positiva, si calcoli

$$\int_{G_f} F \bullet dS.$$

[0]

## 5.5

Calcolare

$$\int_C F \bullet ds$$

dove  $C$  è il bordo del semidisco

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

percorso in senso antiorario e

$$F(x, y) := (xy, \ln(y + 1)).$$

## 5.6

Si consideri la funzione

$$f := [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) := x^2 + xy$$

e il campo vettoriale in  $\mathbf{R}^3$

$$F(x, y, z) := (x, z, 0).$$

Calcolare il flusso di  $F$  attraverso il grafico di  $f$ , scegliendo il verso di attraversamento concorde alla direzione positiva dell'asse  $\mathbf{R}_z$ .

## 5.7

Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) := \left( \frac{x}{2}, 0, z - y^2 + 1 \right)$$

per la superficie data dal grafico della funzione

$$f(u, v) := u^2 + v^2 : B_1(0, 0) \rightarrow \mathbf{R}$$

attraversata nella direzione in cui  $z$  cresce.

## 5.8

Sia  $D \subset \mathbf{R}^2$  il disco unitario centrato nell'origine e si consideri  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x, y) := \frac{e^{x \sin y} \ln(1 + x^2 + y^2)}{2 + \cos(x - y)}.$$

Calcolare il flusso (ascendente) attraverso il grafico di  $f$  del campo

$$F(x, y, z) := (0, 0, 2y).$$

## 5.9

Sia  $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  il campo vettoriale definito come segue

$$F(x, y) := (x^3 y, \cos x).$$

Calcolare il flusso di  $F$  attraverso la curva

$$C := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$$

nella direzione uscente dal disco unitario.

[0]

## 5.10

Siano dati l'insieme

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3}/2 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

e il campo di vettori

$$F(x, y, z) := (y^3 e^{z^2}, y, \arctan x), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Calcolare il flusso di  $F$  uscente dalla superficie  $\partial D$ .

## 5.11

Si consideri la piramide  $P$  con “punta” in  $(0, 0, 1)$  e avente per base il quadrato di vertici  $(1, 1, 0)$ ,  $(-1, 1, 0)$ ,  $(-1, -1, 0)$ ,  $(1, -1, 0)$ . Inoltre, sia dato il campo definito da

$$F(x, y, z) := (2x - (2 + x) \ln(2 + x), y \ln(2 + x), x + z), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Calcolare il flusso (ascendente) di  $F$  attraverso la superficie laterale di  $P$ .

## 5.12

Applicare il teorema di Gauss della divergenza e il risultato dell'esercizio precedente per calcolare l'area di  $\partial B \cap C$  (suggerimento: considerare il campo  $F(x, y, z) := (x, y, z)$ ).

### 5.13

Si consideri la regione limitata  $E$  la cui frontiera è data dall'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Usare il Teorema di Green per determinare l'area di  $\{(x, y) \in E \mid x \geq 1\}$ .

### 5.14

Sia  $B$  la palla di raggio 1 centrata nell'origine e  $C$  il cono

$$\{(x, y, z) \mid z \geq (x^2 + y^2)^{1/2}\}.$$

Considerato il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2 - 1)(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

calcolare

$$\int_{B \cap C} \operatorname{div} F$$

dapprima in modo diretto e in seguito avvalendosi del Teorema di Gauss della divergenza.

[0]

### 5.15

Sia  $E$  l'intersezione fra il cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  e il piano  $z = y$ . Scelta per  $E$  un'orientazione  $\tau$ , calcolare

$$\int_{(E, \tau)} (x, y, z).$$

[0]

### 5.16

Sia  $D$  il disco nel piano coordinato  $xz$ , di raggio unitario e centro l'origine. Calcolare il flusso del campo

$$(x, y, z) \mapsto \left( \cos(x + y), \frac{xz}{1 + y^2}, \ln(1 + x^2) \right)$$

attraverso  $D$  orientato a piacere.

[0]



## 5.17

Si consideri il campo vettoriale

$$F : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z > -1\} \rightarrow \mathbf{R}^3$$

definito come segue

$$F(x, y, z) := \left( xz, \frac{y}{z+1}, -\frac{z^2}{2} + z - \ln(1+z) \right).$$

Inoltre, indicato con  $D$  il disco unitario del piano  $xy$  centrato nell'origine, sia  $E$  il sottografico della funzione

$$D \ni (x, y) \mapsto f(x, y) := [1 + \sin(xy)](1 - x^2 - y^2).$$

Calcolare dapprima l'integrale

$$\int_E \operatorname{div} F$$

e poi, servendosi del risultato ottenuto e del teorema della divergenza, calcolare anche il flusso (ascendente) di  $F$  attraverso il grafico di  $f$ .

$[\pi/2 ; \pi/2]$

## 5.18

Sia  $C$  il cono con il vertice in  $(0, 0, 1)$  e avente come base il disco unitario del piano  $xy$  centrato nell'origine. Inoltre, si indichi con  $S$  la semisfera

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 0\}.$$

Posto  $V := C \cup S$  e considerato il campo

$$F(x, y, z) := (x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,$$

si verifichi che vale il Teorema della divergenza

$$\int_V \operatorname{div} F = \int_{\partial V} F \cdot N$$

dove  $N$  è il campo delle normali esterne a  $V$  nei suoi punti di frontiera.

[I due integrali valgono  $3\pi$ ]

## 5.19

Determinare il campo  $G = (G_1, G_2)$  avente come potenziale la funzione

$$(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)\sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Servirsi del Teorema di Green per calcolare

$$\int_D G_1 - G_2$$

dove  $D$  è il disco unitario centrato nell'origine.

$$\left[ \frac{2+x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^{1/2}}(x, y); 0 \right]$$

## 5.20

Siano dati il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (zy, zx, y(x+1)), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e la curva poligonale chiusa  $\bar{C}$  congiungente (nell'ordine) i seguenti punti

$$(0, 0, 0); \quad (1, 0, 0); \quad (1, 1, 0); \quad (0, 1, 0); \quad (0, 1, 1); \quad (0, 0, 1); \quad (0, 0, 0).$$

Applicare il Teorema di Stokes per calcolare

$$\int_{\bar{C}} F.$$

[1]

## 5.21

Utilizzare l'uguaglianza provata nel Problema 1.31 e il Teorema di Gauss della divergenza per calcolare il flusso (ascendente) del campo vettoriale

$$(x, y, z) \mapsto (z(x^2 + y^2 - 1), z(x^2 + y^2 - 1), xy); \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

attraverso il grafico della funzione

$$(x, y) \mapsto (1 + xy)^{1/2}; \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

[0]

## 5.22

Sia  $\mathcal{P}$  la piramide di vertici

$$(0, 0, 0); \quad (2, 0, 0); \quad (1, 1, 0); \quad (0, 1, 0); \quad (1, 1, 1).$$

Applicare a  $\mathcal{P}$  il teorema della divergenza per calcolare il flusso ascendente del campo

$$F(x, y, z) := (0, 0, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

attraverso la superficie poliedrale data dall'unione dei due triangoli di vertici rispettivamente

$$(0, 0, 0); \quad (2, 0, 0); \quad (1, 1, 1)$$

e

$$(0, 0, 0); \quad (0, 1, 0); \quad (1, 1, 1).$$

$\left[\frac{1}{2}\right]$

## 5.23

Sia  $P$  la piramide limitata dai tre piani cartesiani di  $\mathbb{R}^3$  e dal piano passante per i punti

$$(1, 0, 0), \quad (0, 2, 0), \quad (0, 0, 3).$$

Determinare il flusso uscente da  $P$  del campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (xyz, xyz, xyz).$$

Usare quindi il Teorema di Gauss della divergenza per calcolare

$$\int_P (yz + xz + xy) \, dx dy dz.$$

$\left[\frac{22}{15}, \frac{22}{15}\right]$

## 5.24

Servirsi del teorema di Green per calcolare l'area dell'insieme  $E$  definito come la regione limitata del piano racchiusa dalle curve

$$y = 0, \quad y = x^2, \quad y = 1 - x^2.$$

$\left[\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right]$

## 5.25

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (x, y, z^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e la semisfera

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}.$$

Si calcoli

$$\int_E \operatorname{div} F.$$

Usando tale risultato e il teorema della divergenza, ricavare poi

$$\int_{\partial E} (x^2 + y^2 + z^3) d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

dove  $N$  indica il campo normale esterno a  $\partial E$ .

$$\left[\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}\right]$$

## 5.26

Si consideri il campo di vettori

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (2x, y, 1 - 2z)$$

e la superficie

$$S := \{(x, y, 1 - x^2 - y^2) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Usare il teorema della divergenza e il risultato dell'esercizio 1.41 per calcolare il flusso ascendente di  $F$  attraverso  $S$ .

$$[3\pi/2]$$

## 5.27

Consideriamo il campo

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (0, 0, z)$$

e il tronco di cilindro

$$\Gamma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 + y\}.$$

Calcolare il flusso ascendente di  $F$  attraverso l'ellisse

$$E := \{(x, y, 1 + y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

nei seguenti due modi:

- Mediante calcolo diretto;
- Applicando il teorema della divergenza alla regione  $\Gamma$  e al campo  $F$ .

$[\pi]$

## 5.28

Indichiamo con  $S_1$  il grafico della funzione

$$(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{1/4}, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

e con  $S_2$  quello di

$$(x, y) \mapsto 2 - (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

Calcolare:

- il flusso discendente del campo  $(x, y, z) \mapsto (zx, zy, 0)$  attraverso  $S_1$ ;
- (usando il Teorema della divergenza e il risultato ottenuto nell'esercizio 1.47) il flusso ascendente del campo  $(x, y, z) \mapsto (zx, zy, 0)$  attraverso  $S_2$ .

$[\pi/3; 5\pi/6]$

## 5.29

Consideriamo:

- il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := \left( \frac{z}{x}, x, \ln y \right);$$

- la regione piana compatta  $A$  limitata dalle rette

$$y = x, \quad y = 2x, \quad x + y = 1, \quad x + y = 2;$$

- il grafico  $G$  della funzione

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := xy.$$

Usare il Teorema di Stokes per calcolare

$$\int_{\partial G} F$$

dove per  $\partial G$  si sia scelta arbitrariamente una delle due orientazioni.

$[\pm 1/4]$

### 5.30

Sia  $S$  il grafico della funzione

$$[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto y$$

e sia  $N$  il campo normale a  $S$  avente la terza componente positiva. Servirsi del Teorema di Stokes per calcolare

$$\int_{\partial(S, N)} (z, x, x).$$

[1]

### 5.31

Siano  $\Gamma$  e  $D_z$  gli insiemi definiti nell'esercizio 1.52, sia  $N$  il campo normale a  $\partial\Gamma$  uscente da  $\Gamma$ , sia  $\Sigma := \partial\Gamma - (D_0 \cup D_1)$  e

$$F(x, y, z) := (x, y, -2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Calcolare

$$\int_{\Sigma} F \cdot N$$

usando il Teorema di Gauss.

[2 $\pi$ ]

### 5.32

Verificare la formula di Stokes

$$\int_{(D, N)} \operatorname{rot} F = \int_{\partial(D, N)} F$$

dove  $D$  è il disco di raggio 1 e centro  $(0, 1, 1)$  incluso nel piano  $y = 1$ ,  $N := (0, 1, 0)$  e

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := (-yz, xz, xy).$$

### 5.33

Sia  $E$  il solido ottenuto dalla rotazione intorno all'asse  $z$  della regione compatta del piano  $yz$  delimitata dall'arco di parabola  $z = y^2 - y$  con  $y \geq 0$ , dalla retta  $z = 2$  e dall'asse  $z$ . Usare il

teorema della divergenza per calcolare il flusso uscente da  $E$  del campo vettoriale

$$(x, y, z) \mapsto \left( \frac{y}{1+z^2}, \frac{x}{1+z^2}, (1+z^2)\sqrt{x^2+y^2} \right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

[3072 $\pi$ /35]

### 5.34

Applicare il teorema della divergenza all'insieme

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$

e al campo di vettori

$$F(x, y, z) := (-y, x-1, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

per calcolare il flusso ascendente di  $F$  attraverso la superficie

$$\{(x, y, z) \in \partial E \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}.$$

[8 $\pi$ /3]

### 5.35

Si consideri la parametrizzazione di curva piana

$$\gamma(t) := \left( t, \frac{\sin t}{t} \right), \quad t \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

e il campo di vettori

$$F(x, y) := \left( \frac{3\pi}{2}y, \left( x - \frac{\pi}{2} \right) (\pi - x) \right), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} F$$

applicando il teorema di Green al sottografico di  $t \mapsto \sin t/t$ , con  $t \in (\pi/2, \pi)$ .

[-2]

### 5.36

Eeguire di nuovo il calcolo del flusso considerato nell'esercizio 1.63, stavolta direttamente (e cioè senza ricorrere al teorema della divergenza).

[0]

### 5.37

Siano dati il sottoinsieme compatto  $E$  del primo quadrante del piano cartesiano limitato dalle curve

$$y = x^2, \quad y = x^2 + 1, \quad y = 1, \quad y = 3.$$

e il campo di vettori

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) := (y, x^2y + x).$$

Servirsi del teorema di Green per calcolare

$$\int_{(\partial E, \tau_E)} F$$

dove  $\tau_E$  è il campo vettoriale unitario che orienta positivamente  $\partial E$ .

[4]

### 5.38

Per  $R > 0$ , sia

$$E_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq R\}$$

$$S_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq R\}.$$

Inoltre si indichi con  $N$  il campo normale esterno a  $\partial E_R$  e si consideri il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := \left( \frac{xy^2}{(z+2)^2}, 0, z \right).$$

Dopo aver verificato che per ogni  $(x, y, z) \in S_R$  si ha

$$\frac{x^2y^2}{(z+2)^2} = F(x, y, z) \cdot N(x, y, z)$$

applicare il teorema della divergenza per calcolare

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \frac{x^2y^2}{(z+2)^2} d\mathcal{H}^2(x, y, z).$$

$[\pi/8]$



### 5.39

Sia  $G$  il grafico della funzione

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \ni (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + 3}$$

e sia  $\nu$  il campo normale a  $G$  tale che  $\nu_3 > 0$ . Calcolare il rotore di

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := (-y, x, x^2 z^2)$$

e usare il teorema di Stokes per provare che

$$\int_{(G, \nu)} (0, -xz^2, 1) = \pi.$$

$$[\text{rot} F(x, y, z) = (0, -2xz^2, 2)]$$

### 5.40

Si consideri l'insieme

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$$

e sia  $\nu$  il campo di vettori normali esterni a  $\partial E$ . Applicare il teorema della divergenza per calcolare

$$\int_{(\partial E, \nu)} (\ln(1+y), (x+y)^2).$$

$$[7]$$

### 5.41

Data la superficie

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

sia  $\nu$  il campo continuo normale a  $S$  avente la terza componente positiva. Inoltre sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definito come segue

$$F(x, y, z) := (xye^z, e^{x^2+y^2}, \sin(xyz)).$$

- Calcolare  $\text{rot} F$  in  $(x, y, z)$  e  $\nu$  in  $(x, y, x^2 + y^2) \in S$ ;
- Usare il teorema di Stokes per calcolare

$$\int_{(S, \nu)} \text{rot} F.$$

$[\text{rot } F(x, y, z) = (xz \cos(xyz), -yz \cos(xyz) + xye^z, 2xe^{x^2+y^2} - xe^z); \nu(x, y, x^2+y^2) = (-2x, -2y, 1)/(1+4x^2 + 4y^2)^{1/2}; 0]$

## 5.42

Si considerino:

- La superficie orientata  $(S, \nu)$ , dove  $S$  è il grafico della funzione

$$(x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2}, \quad (x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1]$$

e  $\nu$  è il campo normale a  $S$  avente la terza componente positiva;

- Il campo vettoriale

$$(x, y, z) \mapsto (yz, yz, yz), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Verificare che vale la formula di Stokes.

[Il valore comune dei due integrali nell'identità di Stokes è  $-\pi/2$ ]

## 5.43

Si considerino:

- La superficie orientata  $(S, \nu)$ , con

$$S := \{(x, y, 1) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

e

$$\nu : S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (0, 0, 1);$$

- Il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x + y, y + z, z + x).$$

Verificare che vale la formula di Stokes.

[Il valore comune dei due integrali nell'identità di Stokes è  $-3\pi$ ]

## 5.44

Sia  $E$  il parallelogramma di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 1)$ . Inoltre sia  $\tau$  il campo di vettori unitari che orienta positivamente  $\partial E$ . Usare il teorema di Green per calcolare l'integrale

$$\int_{(\partial E, \tau)} (x \ln(1+y), x+y).$$

$[\frac{\ln 2}{2}]$

## 5.45

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (yz, -xz, z(x^2 + y^2)), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e la semipalla

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}.$$

Usare il teorema della divergenza di Gauss per calcolare

$$\int_E (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_E \operatorname{div} F dx dy dz.$$

$[4\pi/15]$

## 5.46

Si considerino

- la calotta sferica

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 1\}$$

orientata dal campo normale ascendente ( $N_3 > 0$ );

- il campo di vettori

$$F(x, y, z) := (y + \ln(1+x^2), z + \ln(1+y^2), x + \ln z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty).$$

Verificare la formula di Stokes.

## 5.47

Si considerino (nel piano):

- La spirale di Archimede  $C_1$  parametrizzata da  $\gamma(t) := (t \cos t, t \sin t)$ , con  $t \in [0, 2\pi]$ ;
- Il segmento  $C_2$  congiungente l'origine al punto  $(2\pi, 0)$ ;
- La regione limitata  $E$  tale che  $\partial E = C_1 \cup C_2$ .

Usare la formula di Green per calcolare l'area di  $E$ .

$[4\pi^3/3]$

## Chapter 6

# Potenziale di un campo vettoriale

### 6.1

Stabilire se il campo vettoriale

$$F(x, y) := \left( \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}, -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \right)$$

è conservativo in  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y > 0\}$  e, in caso affermativo, scriverne un potenziale. Dire infine se  $F$  è conservativo nel suo dominio di esistenza  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y \neq 0\}$ .

[sì;  $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ ]

### 6.2

Si consideri il campo vettoriale piano

$$F(x, y) := (\sin(x + y) + x \cos(x + y), x \cos(x + y)).$$

Stabilire se esso è conservativo in  $\mathbf{R}^2$  ed, eventualmente, determinarne un potenziale.

### 6.3

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y, z) := (z, 3z, x + 3y).$$

Stabilire se esso è conservativo in  $\mathbf{R}^3$  ed, eventualmente, determinarne un potenziale.

[sì;  $z(x + 3y)$ ]

## 6.4

Provare che il campo vettoriale

$$F(x, y) := (e^x(1 + x - y), -e^x)$$

è conservativo. Determinarne il potenziale che si annulla nell'origine.

## 6.5

Dimostrare che il campo

$$F(x, y) := (e^y - ye^x, xe^y - e^x)$$

soddisfa CIP. Calcolare

$$\int_C F \bullet ds$$

dove  $C$  è una curva qualsiasi avente  $(0, 0)$  come punto iniziale e  $(1, 1)$  come punto finale.

[0]

## 6.6

Sia

$$D := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi \text{ e } 0 \leq y \leq \sin x\}, \quad \bar{F}(x, y) := (x, y^2)$$

e denotiamo con  $C$  la parte di  $\partial D$  costituita dall'arco di senoide percorsa "da sinistra a destra".

- Usando il teorema di Gauss, calcolare il flusso di  $\bar{F}$  attraverso  $\partial D$  (uscendo da  $D$ ).
- Stabilire se il campo  $\bar{F}$  è conservativo.
- Calcolare

$$\int_C x dx + y^2 dy.$$

## 6.7

Dimostrare che il campo

$$F(x, y) := (e^y - ye^x, xe^y - e^x)$$

soddisfa CIP. Calcolare

$$\int_C F \bullet ds$$

dove  $C$  è una curva qualsiasi avente  $(0, 0)$  come punto iniziale e  $(1, 1)$  come punto finale.

## 6.8

Stabilire se il campo di vettori

$$F(x, y) := (-2(y+1)x^{-3}, x^{-2})$$

è conservativo. In caso affermativo, determinare un potenziale di  $F$ .

## 6.9

Determinare l'insieme di esistenza del campo

$$F(x, y) := \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y).$$

Stabilire se  $F$  è conservativo e, in caso affermativo, determinarne un potenziale.

## 6.10

Stabilire se il campo di vettori

$$F(x, y) := \left( \frac{2}{x - \frac{y}{x}}; \frac{1}{y - x^2} \right)$$

è conservativo. In caso affermativo, determinarne un potenziale.

## 6.11

Dimostrare che il campo di vettori

$$(x, y) \mapsto \left( \ln y - \frac{y}{x}, \frac{x}{y} - \ln x \right), \quad (x, y) \in (0, +\infty)^2$$

soddisfa CIP. Determinarne il potenziale  $\varphi$  tale che  $\varphi(1, 1) = 0$  e verificare che  $\varphi(y, x) = -\varphi(x, y)$ .

## 6.12

Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y) := \left( \frac{y^2 + xy + 1}{x + y}, \frac{x^2 + xy + 1}{x + y} \right), \quad x + y \neq 0.$$

- (i) Dimostrare che  $F$  è conservativo;
- (ii) Sia  $\varphi$  un potenziale di  $F$  e sia

$$\psi(x, y) := -\frac{x^2 + y^2}{2} + x + y, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Dire in quali punti la funzione complessa  $\varphi + i\psi$  è olomorfa.

### 6.13

Descrivere il dominio (massimale) di esistenza del campo

$$F(x, y) := \left( \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), -\arctan \frac{y}{x} \right).$$

Stabilire se  $F$  è conservativo. Nel caso che lo sia, se ne determini la famiglia dei potenziali.

### 6.14

Determinare  $\varphi \in C^1(\mathbf{R}^2)$ , sapendo che essa è potenziale del campo vettoriale

$$F(x, y) := (2x\varphi(x, y), \varphi(x, y))$$

e che  $\varphi(0, 0) = 1$ . Determinare poi

$$\int_{\overline{C}} F \bullet ds$$

dove  $\overline{C}$  è il grafico della funzione

$$x \mapsto x + \sin x, \quad x \in [0, \pi]$$

orientato di modo che  $(0, 0)$  sia il punto iniziale.

### 6.15

Determinare un campo  $F$  con potenziale

$$\Phi(x, y) := x - 3y + x^2, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Esistono altri campi con lo stesso potenziale? Motivare la risposta. Calcolare infine

$$\int_P F$$

dove  $P$  è la poligonale congiungente, nell'ordine, i punti:

$$(0, 0), \quad (1, 1), \quad (0, 2), \quad (3, 3), \quad (0, 4), \quad (5, 5), \quad (0, 6), \quad (7, 7), \quad (0, 8).$$

[No; - 24]



## 6.16

Stabilire se il campo

$$F(x, y) := \frac{(y, -x)}{(y-x)^2}, \quad x \neq y$$

è conservativo. Calcolare

$$\int_{\overline{C}} F$$

dove  $C$  è il grafico della funzione

$$x \mapsto x \sin x, \quad x \in [0, 4\pi]$$

e l'orientazione è scelta di modo che l'origine sia il punto iniziale.

[Campo conservativo; 0]

## 6.17

Calcolare

$$\int_{\overline{S \cup C}} F$$

dove

- $\overline{S}$  è il segmento orientato avente  $(1, 1, 0)$  come punto iniziale e  $(1, 0, 0)$  come punto finale;
- $\overline{C}$  è il quarto di circonferenza, nel piano  $x = 1$ , di centro  $(1, 1, 0)$  e orientato in modo tale che  $(1, 0, 0)$  e  $(1, 1, 1)$  ne siano rispettivamente il punto iniziale e il punto finale;
- $F$  è il campo vettoriale

$$(x, y, z) \mapsto \left( -\frac{y}{x^2}, \frac{1}{x}, 1 \right).$$

[1 (un potenziale è dato da  $\frac{y}{x} + z$ )]

## 6.18

Considerato il campo di vettori

$$F(x, y) := \left( \frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y+\alpha}{1+x^2+y^2} \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

determinare un valore di  $\alpha$  per cui si abbia

$$\int_C F = 0$$

per ogni circonferenza  $C$  centrata nell'origine e percorsa in senso orario.

[0]

## 6.19

Stabilire per quali valori di  $\alpha$  il campo

$$(x, y) \mapsto \left( \frac{\alpha + (1 - \alpha)x}{x + e^{-y}}, \frac{1 - \alpha + \alpha x}{x + e^{-y}} \right)$$

risulta conservativo nel primo quadrante del piano cartesiano.

[1]

## 6.20

Si consideri il campo vettoriale

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) := (2x|y|, x^2).$$

- Determinare un potenziale di  $F$  in  $(0, +\infty)^2$ ;
- Stabilire (motivando la risposta) se esiste un potenziale di  $F$  in  $(0, +\infty) \times (0, -\infty)$ ;
- Stabilire (motivando la risposta) se esiste un potenziale di  $F$  di classe  $C^2$  in un insieme aperto contenente almeno un punto della retta  $y = 0$ .

$[x^2y$ ; non esiste; non esiste]

## 6.21

Determinare un potenziale del campo vettoriale

$$F(x, y) := \left( \frac{xy^2}{xy - 1}, \frac{x^2y}{xy - 1} \right), \quad (x, y) \in A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 1\}$$

dopo averne dimostrato l'esistenza.

$[xy + \ln |xy - 1|]$

## Chapter 7

# Analisi complessa

### 7.1

Data la funzione complessa

$$f(z) := \frac{e^z}{z^2 - i},$$

determinarne il campo di esistenza. Stabilire poi dove  $f$  è derivabile e calcolare  $f'(z)$  nei punti dove esiste.

### 7.2

Dire se la funzione

$$f(z) := \bar{z} = x - iy$$

ha una primitiva. Calcolare

$$\int_C f(z) dz$$

dove  $C$  è il segmento che congiunge  $0$  a  $1 + i$ , orientato in modo che  $0$  ne sia il punto iniziale.

### 7.3

Calcolare

$$\int_C \frac{\sin z}{(z - 2i - 1)^5} dz$$

nei seguenti casi:

- $C$  è la circonferenza di raggio  $4$  e centro l'origine, percorsa in senso antiorario;

- $C$  è il bordo del rettangolo avente per diagonale il segmento di estremi  $0$  e  $2 + i$ , percorso in senso antiorario.

## 7.4

Sia data la funzione complessa

$$f(z) := \frac{1}{z - i}.$$

- Esiste un semipiano nel quale  $f$  ha una primitiva?
- In caso affermativo, determinare una di tali primitive.

## 7.5

Calcolare

$$\int_C f(z) dz$$

dove  $f$  è la funzione dell'esercizio 7.4, mentre  $C$  è la circonferenza di raggio 2 e centro  $i$ , percorsa in senso antiorario.

## 7.6

Verificare che

$$u(x, y) := \frac{x}{x^2 + y^2}$$

è armonica in  $\mathbf{C} \setminus \{(0, 0)\}$ . Determinare una funzione armonica coniugata di  $u$ .

## 7.7

Si considerino le curve

$$C_1 := \{(x, 0) \mid x \in [-2, 2]\}, \quad C_2 := \{(x, y) \mid y \geq 0, x^2 + y^2 = 4\}$$

orientate in modo che  $(-2, 0)$  è il punto iniziale di  $C_1$ , mentre  $(2, 0)$  è il punto iniziale di  $C_2$ . Calcolare

$$\int_{C_1} \frac{2}{z - i} dz, \quad \int_{C_1 \cup C_2} \frac{2}{z - i} dz$$

(per quest'ultimo usare la formula di Cauchy) e servirsi dei risultati così ottenuti per ricavare

$$\int_{C_2} \frac{2}{z-i} dz.$$

## 7.8

Servirsi delle condizioni di Cauchy-Riemann per verificare che l'integrale

$$\int_C z e^z dz$$

dove  $C$  è una qualsiasi curva orientata nel piano complesso, non dipende completamente da  $C$  ma solo dai suoi punti estremi. Calcolare tale integrale nel caso che  $C$  abbia  $(0,0)$  come punto iniziale e  $(1,1)$  come punto finale.

## 7.9

Si consideri la funzione  $u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$u(x, y) := x^2 - y^2 - x.$$

Verificare che  $u$  è armonica. Trovare una funzione olomorfa avente  $u$  come parte reale.

## 7.10

Si consideri la funzione complessa di variabile complessa

$$f(z) := f(x + iy) := x^2 + i 2xy.$$

Risolvere le seguenti questioni:

- Stabilire se  $f$  è olomorfa in  $\mathbf{C}$ .
- Indicato con  $C$  il segmento congiungente  $(0,0)$  con  $(2,1)$ , si calcoli

$$\int_C f(z) dz.$$

- Determinare una funzione reale  $\varphi(y)$  in modo che

$$g(z) := f(x + iy) + \varphi(y) = x^2 + \varphi(y) + i 2xy$$

sia olomorfa in  $\mathbf{C}$ .

## 7.11

Determinare due numeri reali  $a$  e  $b$  di modo che la funzione

$$f(z) = f(x, y) = x^3 + axy^2 + i(bx^2y - y^3)$$

sia derivabile in  $\mathbf{C}$ . Calcolare poi  $f'(z)$ .

## 7.12

Si considerino le due poligonal  $C_1$  e  $C_2$  con lati paralleli agli assi e congiungenti l'origine al punto  $(x, y) \in \mathbf{C}$ . Si calcolino gli integrali

$$I_1 := \int_{C_1} f(z) dz, \quad I_2 := \int_{C_2} f(z) dz$$

dove  $f$  è la funzione definita nell'esercizio 7.11. Trovare  $a$  e  $b$  tali che  $I_1 = I_2$ .

Facoltativo: individuare e argomentare la relazione fra le conclusioni di questo esercizio e dell'esercizio 7.11.

## 7.13

Data la funzione complessa

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2x + 2i(x + 1)y$$

si calcoli

$$\int_C f(z) dz$$

dove  $C$  è il segmento che conduce dall'origine al punto  $(1, 1)$ . Infine, si verifichi che  $f$  soddisfa CIP $_{\mathbf{C}}$ .

## 7.14

Data la funzione

$$u(x, y) := x^2 - y^2 - 2x,$$

si determini una nuova funzione  $v(x, y)$  tale che  $u + iv$  sia analitica in  $\mathbf{C}$ .

## 7.15

Si consideri la funzione complessa

$$f(z) := \frac{z}{z-i}.$$

Stabilire (motivando le risposte):

- In quali punti di  $\mathbf{C}$  la funzione  $f$  è derivabile.
- Se esiste una primitiva di  $f$  in  $\mathbf{C} \setminus \{i\}$ .

## 7.16

Data la funzione

$$f(z) := x^2 - y^2 - x - iy(1 - 2x), \quad z = x + iy \in \mathbf{C}$$

affrontare le seguenti questioni.

- Dimostrare che  $f$  soddisfa CIP;
- Si scelga una curva  $C$  congiungente  $0$  a  $2 + i$  e si calcoli quindi  $\int_C f(z) dz$ ;
- Verificare che il Teorema fondamentale del calcolo in  $\mathbf{C}$  produce lo stesso risultato a cui si è pervenuti nel punto precedente.

## 7.17

Calcolare

$$\int_C ze^z dz$$

dove  $C$  è la semicirconferenza  $\{(x, y) \in \mathbf{C} \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$ , percorsa in senso antiorario.

## 7.18

Determinare  $f(y)$  tale che  $f(0) = f'(0) = 0$  e

$$u(x, y) := f(y) - x^2 y$$

sia armonica. In seguito, determinare una funzione armonica coniugata ad  $u$ .

## 7.19

Data la curva piana

$$C := \{x + iy \mid y = 1 + x, -1 \leq x \leq 0\} \cup \{x + iy \mid y = 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}$$

calcolare

$$\int_C e^{iz} z^2 dz$$

con entrambi i versi di percorrenza possibili per  $C$ .

## 7.20

Verificare che la funzione

$$u(x, y) := e^{2x}(2 \cos^2 y - 1), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

è armonica. Usare gli integrali curvilinei per determinare la funzione armonica ad essa coniugata e nulla nell'origine.

## 7.21

Studiare la derivabilità della funzione complessa

$$f(z) = f(x, y) := e^{y+ix}, \quad (x, y) \in \mathbf{C}.$$

Determinare l'integrale

$$\int_C f(z) dz$$

dove  $C$  indica il segmento avente  $i$  e  $1 + i$  come punti iniziale e finale, rispettivamente.

[ $f$  non è derivabile in nessun punto;  $e \sin 1 + i e(1 - \cos 1)$ ]

## 7.22

Studiare la derivabilità della funzione complessa

$$f(x, y) := x^4 - y^3 + ix^2y, \quad (x, y) \in \mathbf{C}.$$

Calcolare poi l'integrale di  $f$  lungo l'arco di parabola  $y = x^2$ , avente  $(0, 0)$  come punto iniziale e  $(1, 1)$  come punto finale.

[ $f$  è derivabile in  $(0, 0)$ ,  $(1/4, 0)$ ,  $(1/4, 1/6)$ ;  $f'$  vale rispettivamente  $0$ ,  $1/16$ ,  $1/16 + i/12$ ; l'integrale vale  $-29/105 + 17i/60$ .]



### 7.23

Determinare un valore di  $a$  per il quale la funzione

$$u(x, y) := e^{ax} \cos y \sin y, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

è armonica. Ricavare in seguito una funzione armonica coniugata di  $u$ .

$$\left[-\frac{1}{2}e^{2x} \cos(2y)\right]$$

### 7.24

Sia  $C_\alpha$  la curva congiungente  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ , definita come il grafico della funzione

$$t \mapsto t^\alpha, \quad t \in [0, 1]$$

dove  $\alpha > 0$ . Si consideri inoltre la funzione complessa

$$f(z) = f(x, y) := x^2 - y^2 + ax + i2y(x - 1).$$

Determinare un valore di  $a$  per il quale l'integrale

$$\int_{C_\alpha} f(z) dz$$

risulta non dipendere da  $\alpha$ .

$$[-2]$$

### 7.25

Determinare la funzione  $g$  tale che

$$u(x, y) := x^2 + g(y) - 4x + 1$$

risulti armonica e soddisfi

$$g(0) = g'(0) = 0.$$

Ricavare in seguito una funzione armonica coniugata di  $u$ .

$$[2xy - 4y]$$

## 7.26

Verificare che la funzione

$$v(x, y) := e^x(x \cos y - y \sin y), \quad (x, y) \in \mathbf{C}$$

è armonica. Determinare poi  $u : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  tale che  $u + iv$  sia derivabile.

$$[-e^x(x \sin y + y \cos y)]$$

## 7.27

Scegliere  $\alpha$  affinché la funzione complessa

$$f : z = x + iy \mapsto \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2) + i\frac{y}{x}$$

sia derivabile in  $1 + i$ . Per tale  $\alpha$ , determinare tutti i punti in cui  $f$  è derivabile. Infine, posto  $\alpha := 2$ , calcolare

$$\int_{\bar{S}} f(z) dz$$

dove  $\bar{S}$  è il segmento orientato di punto iniziale 1 e punto finale  $1 + i$ .

$$[-\frac{1}{2} + i\frac{4}{3}]$$

## 7.28

Determinare l'insieme dei punti in cui la funzione complessa

$$x + iy \mapsto 2xy + i(x - y + x^2)$$

è derivabile.

$$[-\frac{1}{4} - i\frac{1}{2}]$$

## 7.29

Calcolare

$$\int_C \bar{z} dz$$

dove  $C$  è l'arco ottenuto intersecando la circonferenza di raggio 1 centrata in  $(0, 1)$  con il primo quadrante del piano cartesiano e l'orientazione è quella positiva.

$$[2 + i\pi]$$

### 7.30

Calcolare

$$\int_{\overline{S} \cup \overline{C}} F$$

dove

- $\overline{S}$  è il segmento orientato avente  $(1, 1, 0)$  come punto iniziale e  $(1, 0, 0)$  come punto finale;
- $\overline{C}$  è il quarto di circonferenza, nel piano  $x = 1$ , di centro  $(1, 1, 0)$  e orientato in modo tale che  $(1, 0, 0)$  e  $(1, 1, 1)$  ne siano rispettivamente il punto iniziale e il punto finale;
- $F$  è il campo vettoriale

$$(x, y, z) \mapsto \left( -\frac{y}{x^2}, \frac{1}{x}, 1 \right).$$

$[D = (0, +\infty)^2 \cup (-\infty, 0)^2$ ; la funzione è derivabile in  $(1, 1)$  e in  $(-1, -1)$ ]

### 7.31

Per ogni numero reale  $a$ , sia  $D_a$  l'insieme dei punti in cui la funzione complessa  $x + iy \mapsto xy + i(ax^2 + y)$  è derivabile. Determinare  $D_0$  e  $D_{-1/2}$ .

$$[D_0 = \{i\}; D_{-1/2} = \{x + i \mid x \in \mathbf{R}\}]$$

### 7.32

Sia  $T$  il triangolo di vertici  $-1, 1, i$ . Provare che la funzione

$$w \mapsto \int_{\partial T} \frac{3z^2 - z + 2}{(z - w)^3} dz$$

è costante all'interno di  $T$ .

$$[6\pi i]$$

### 7.33

Calcolare

$$\int_C e^{x-iy} dz$$

dove  $C$  è il segmento congiungente 0 (punto iniziale) a  $1 + i$ .

$$[i(e^{1-i} - 1)]$$

### 7.34

Provare che la funzione complessa

$$(x, y) \mapsto \frac{\ln(1+x)}{y} + i(x^2 - y^2) \quad (x > -1, y \neq 0)$$

non è derivabile in alcun punto dell'asse  $x = 0$ .

$$[\text{Le condizioni di C-R in } (0, y) \text{ si riducono a } y^2 = -1]$$

### 7.35

Determinare i punti del primo quadrante in cui la funzione complessa

$$x + iy \mapsto \frac{x}{x + e^{-y}} + i \frac{1}{x + e^{-y}}$$

è derivabile.

$$[\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 1, y = \ln x\}]$$

### 7.36

Determinare

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

tali che la funzione complessa

$$2x^3 + \alpha xy^2 + x^2 - y^2 - x - \alpha + 1 + iv(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{C}$$

è derivabile in  $\mathbb{C}$ .

$$[\alpha = -6; v(x, y) = 2xy + 6x^2y - 2y^3]$$

### 7.37

Si consideri la famiglia di funzioni complesse di variabile complessa

$$f_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z = x + iy \mapsto (\alpha + i)x - y$$

parametrizzata da  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Determinare i valori del parametro  $\alpha$  per cui è nullo l'integrale di  $f_\alpha$  lungo la circonferenza unitaria centrata nell'origine. Verificare che per tali valori di  $\alpha$  la funzione  $f_\alpha$  è derivabile in  $\mathbb{C}$ .

[0]

### 7.38

Discutere l'esistenza di primitive della funzione

$$f_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_\alpha(x, y) := x^2 - y^2 + i\alpha xy$$

al variare di  $\alpha$  in  $\mathbb{R}$ .

[Esiste primitiva se e solo se  $\alpha = 2$ ]

### 7.39

Provare che una funzione complessa della forma  $(x, y) \mapsto u(x, y) + iu(x, y)$  è derivabile se e solo se  $u$  è costante su ogni componente connessa del dominio.

### 7.40

Provare che la funzione complessa

$$(x, y) \mapsto \ln(1 + xy) + ixy$$

è derivabile soltanto in  $(0, 0)$ .

### 7.41

Supponiamo che la parte reale di una funzione complessa derivabile in  $\mathbb{C}$  sia della forma

$$(x, y) \mapsto y \int_0^x g(t) dt$$

dove  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile. Provare allora che  $g$  è costante.

### 7.42

Provare che la seguente funzione complessa

$$(x, y) \mapsto \frac{(x + iy)(\cos y - i \sin y)}{e^x}, \quad (x, y) \in \mathbb{C}$$

è dotata di primitiva.

### 7.43

Provare che se  $u + iv$  è una funzione derivabile in  $\mathbb{C}$  allora vale l'uguaglianza

$$\operatorname{div}(u\nabla v) = 0.$$

### 7.44

Calcolare

$$\int_C \frac{z^2 e^z}{8z + 9i} dz$$

dove  $C$  è la circonferenza unitaria centrata nell'origine, percorsa in senso antiorario.

[0]

### 7.45

Stabilire in quali punti la funzione complessa

$$x + iy \mapsto \frac{x}{y} + iy$$

è derivabile. Calcolare il valore della derivata in questi punti.

[[i]; 1]

## 7.46

Si considerino la funzione complessa

$$f(x, y) := xy + i \frac{(x + y)^2}{2}, \quad x + iy \in \mathbb{C}$$

e il segmento orientato  $\overline{C}$  avente  $(0, 0)$  come punto iniziale e  $(1, 0)$  come punto finale. Determinare:

- i punti in cui  $f$  è derivabile;
- l'integrale

$$\int_{\overline{C}} f(z) dz.$$

$$[\{(0, 0)\}; \frac{i}{6}]$$

## 7.47

Determinare i punti in cui la funzione complessa

$$x + iy \mapsto x \cos y (1 + i \sin y), \quad x + iy \in \mathbb{C}$$

è derivabile.

$$[\{((-1)^k, k\pi), (0, k\pi + \pi/2) \mid k \in \mathbb{Z}\}]$$

## 7.48

Sia  $\Omega := (0, +\infty)^2$  e

$$u(x, y) := x + \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Verificare che  $u$  è una funzione armonica. Determinare  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $u + iv$  sia derivabile in  $\Omega$ .

$$\left[ u(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right]$$

### 7.49

Sia  $u$  la parte reale di una funzione complessa derivabile nel sottoinsieme aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{C}$  e sia  $E$  un sottoinsieme compatto di  $\Omega$  con frontiera regolare a tratti. Provare che allora

$$\int_{\partial E} u \nabla u = 0.$$

### 7.50

Sia

$$f(w) := \int_{[0;w]} (z-w)^2 dz, \quad (w \in \mathbb{C}).$$

Verificare che  $f$  è derivabile in  $\mathbb{C}$  e calcolare  $f'$ .

$$[f'(w) = w^2]$$

### 7.51

Provare che la funzione complessa

$$x + iy \mapsto xe^{ix}$$

non è derivabile in alcun punto.

### 7.52

Calcolare l'integrale complesso

$$\int_C 1 + i\sqrt{1-y^2} dz$$

dove  $C$  è il grafico della funzione  $\sin$  su  $[-\pi/2, \pi/2]$ , orientato di modo che  $(-\pi/2, -1)$  ne sia il punto iniziale.

$$[\pi/2 + i4]$$

### 7.53

Provare che la funzione

$$u(x, y) := \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$$



è armonica. Determinare poi una funzione armonica coniugata di  $u$ .

$$\left[ \frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2)^2} \right]$$

## 7.54

Sia  $\bar{\Gamma}$  la curva orientata (spirale) parametrizzata dalla mappa

$$t \mapsto i + te^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Calcolare

$$\int_{\bar{\Gamma}} \frac{1}{z^2} dz.$$

$$\left[ \frac{-2\pi}{1+4\pi^2} + i \frac{-4\pi^2}{1+4\pi^2} \right]$$

## 7.55

determinare  $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che la funzione

$$f(x, y) := \varphi(y) \sin x + i\psi(x)e^y, \quad (x, y) \in \mathbb{C}$$

sia derivabile.

$$[\psi(x) = \cos x, \varphi(y) = e^y]$$

## 7.56

Determinare una funzione liscia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che la funzione complessa

$$x + iy \mapsto x^3 - yf(x, y) + i[xf(x, y) - y^3]$$

sia derivabile in  $\mathbb{C}$ .

$$[3xy]$$

## 7.57

Usare il Teorema di rappresentazione integrale di Cauchy per calcolare

$$\int_C \frac{z}{z-i} dz$$

dove  $C$  è la semicirconferenza parametrizzata da

$$\gamma(t) := 2(\cos t, \sin t), \quad t \in [0, \pi].$$

[4 - 2 arctg 2]

## 7.58

Sia

$$f(w) := \int_{[0;w]} \bar{z} dz, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Determinare i punti in cui  $f$  è derivabile.

[ $f(w) = |w|^2/2$ ;  $f$  è derivabile solo in 0]

## 7.59

Determinare  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che la funzione  $x + iy \mapsto ax + by + x + y + i(ax + by)$  risulti derivabile in  $\mathbb{C}$ .

[ $a = -1, b = 0$ ]

## 7.60

Sia

$$u(x, y) := e^x(x \cos y - y \sin y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Provare che esiste una funzione  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $u + iv$  è derivabile in  $\mathbb{C}$ . Determinare un'espressione esplicita del campo normale  $N$  al grafico di  $v$  tale che  $N_3 > 0$ .

## 7.61

Siano dati un sottoinsieme aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^2$  e due funzioni  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Provare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i)  $u$  e  $v$  sono costanti in ogni componente connessa di  $\Omega$ ;
- (ii)  $u + iv$  e  $v + iu$  sono derivabili.

## 7.62

Sia  $C$  un sottoinsieme compatto di  $\mathbb{R}^2$ , chiusura di un aperto  $A$  la cui frontiera ha misura nulla e siano  $u, v : C \rightarrow \mathbb{R}$  tali che:

- (i) la mappa  $\Phi := (u, v) : C \rightarrow \mathbb{R}^2$  soddisfa le ipotesi del teorema del cambiamento della variabile nell'integrale;
- (ii)  $u + iv$  è derivabile in  $A$ .

Provare che

$$m_2(\Phi(A)) = \frac{1}{2} \int_A (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2).$$

## 7.63

Per ogni  $w \in \mathbb{C}$ , sia  $f_w$  la funzione complessa definita come segue:

$$f_w(x, y) := wy - w^2x, \quad (x, y) \in \mathbb{C}.$$

Provare che  $f_w$  è derivabile in  $\mathbb{C}$  se e soltanto se  $w = 0$  oppure  $w = i$ .

## 7.64

Determinare

$$\int_{\bar{C}} z^3 dz$$

dove  $\bar{C}$  è l'arco di parabola parametrizzato da

$$\gamma(t) := t(2-t) + it, \quad t \in [0, 2].$$

[4]

## 7.65

Descrivere la famiglia delle funzioni  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$u(x, y) := x^2 - 2x - p(y). \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

sia una funzione armonica in  $\mathbb{R}^2$ . Data una  $p$  siffatta, determinare le funzione armoniche coniugate di  $u$  che valgono zero nell'origine.

[ $p(y) = y^2 + ay + b$ ,  $v(x, y) = 2xy - 2y + ax$  (con  $a, b \in \mathbb{R}$ )]

## 7.66

Determinare  $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$  tale che la funzione

$$u(x, y) := y\varphi(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

sia armonica e soddisfi  $u(1, 1) = 2$ ,  $u(0, 1) = 0$ . Determinare un'armonica  $v$  coniugata di  $u$ .

$$[\varphi(x, y) = 2x, v(x, y) = y^2 - x^2]$$

## 7.67

Determinare una funzione derivabile  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che la funzione complessa

$$z = x + iy \mapsto f(z) := x^3 - x\varphi(y) + i(y\varphi(x) - y^3)$$

risulti derivabile in ogni punto di  $\mathbb{C}$ . Calcolare poi

$$\int_{\overline{C}} f(z) dz$$

dove  $\overline{C}$  è l'arco di circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$  con  $x, y \geq 0$ , orientata in senso antiorario.

$$[\varphi(t) = 3t^2, 0]$$

## 7.68

Discutere, al variare del parametro  $\alpha \in \mathbf{R}$ , la derivabilità della funzione  $F_\alpha : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  definita da

$$F_\alpha(w) := \int_{[0;w]} f_\alpha(z) dz \quad (w \in \mathbf{C})$$

dove  $[0; w]$  è il segmento orientato congiungente 0 (punto iniziale) e  $w$ , mentre  $f_\alpha(z) = f_\alpha(x + iy) := x + i\alpha y$ .

[Se  $D_\alpha$  indica l'insieme dei punti in cui  $F_\alpha$  è derivabile, si ha:  $D_1 = \mathbf{C}$  e  $D_\alpha = \{0\}$  per ogni  $\alpha \neq 1$ ].

## 7.69

Studiare, per  $\rho \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$  e  $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ , la funzione complessa

$$\varphi(\rho, k) := \int_{C_\rho} \frac{(z+i)^2}{(z-i)^k} dz$$

dove  $C_\rho$  è la circonferenza di raggio  $\rho$  centrata nell'origine, percorsa in senso antiorario.

$[\varphi = 0$  su  $(0, 1) \times \{1, 2, \dots\}$ ;  $\varphi = 0$  su  $(1, +\infty) \times \{4, 5, \dots\}$ ; inoltre, per  $\rho > 1$ :  $\varphi(\rho, 1) = -8\pi i$ ,  
 $\varphi(\rho, 2) = -8\pi$ ,  $\varphi(\rho, 3) = 2\pi i]$

## 7.70

Descrivere, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $D_\alpha$  dei punti in cui la funzione complessa

$$\mathbb{C} \ni x + iy \mapsto \alpha xy + i(\alpha x^2 - y^2)$$

è derivabile. Calcolare l'integrale complesso di tale funzione sul segmento che congiunge l'origine (punto iniziale) e  $2 + i$ .

$[D_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$ ,  $D_{-2} = \{0\} \times \mathbb{R}$ ,  $D_\alpha = \{(0, 0)\}$  se  $\alpha \neq 0, -2$ ;  $\frac{1}{3} + \frac{10\alpha-2}{3}i]$

## Chapter 8

# Formula di Taylor, massimi e minimi di funzione

### 8.1

Trovare (dopo averne motivato l'esistenza) il minimo della funzione

$$f(x, y, z) := \frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2$$

soggetta al vincolo

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 4x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

### 8.2

Si consideri la funzione  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x, y) := xy(x^2 + y^2 - 2x)$$

e si affrontino le seguenti questioni:

- determinare e classificare i punti critici di  $f$ ;
- dire se esistono il massimo ed il minimo assoluti di  $f$  nel disco chiuso di raggio 3 centrato nell'origine e, in caso affermativo, ricavarli;
- dire se esistono il massimo ed il minimo assoluti di  $f$  in  $\mathbf{R}^2$  e, in caso affermativo, ricavarli;
- si può ricondurre la particolare simmetria dell'insieme dei punti critici a qualche simmetria di  $f$  ?

### 8.3

Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) := x^2y - (x + y)^2$$

e classificare quelli diversi da  $(0, 0)$ .

### 8.4

Determinare gli estremi locali e globali della funzione

$$f(x, y) := x^3 + xy^2 - 2xy$$

nell'insieme  $D := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2x - x^2\}$ .

### 8.5

Classificare gli eventuali punti critici della funzione  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x, y) := (x + y^2)e^x.$$

Dire se  $f$  ha massimo assoluto. Determinare il minimo assoluto di  $f$  nel disco chiuso di raggio 1 centrato in  $(0, 0)$ .

### 8.6

Sia  $C$  il cono di equazione

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Determinare esplicitamente la distanza  $d(x, y)$  del punto  $(1, 1, 0)$  dal punto di  $C$  avente  $(x, y, 0)$  come ombra.
- Verificare che il grafico della funzione

$$f(x, y) := d^2(x, y)$$

è convesso in ogni suo punto.

- Dimostrare che  $f$  ha un unico punto stazionario  $P_0(x_0, y_0)$  e che questo è di minimo assoluto.
- Verificare che il vettore

$$(1, 1, 0) - (x_0, y_0, \sqrt{x_0^2 + y_0^2})$$

è perpendicolare a  $C$  nel punto  $(x_0, y_0, \sqrt{x_0^2 + y_0^2})$ .

## 8.7

Data la funzione

$$f(x, y) = \ln(2 + xy)$$

se ne scriva il polinomio di Taylor del secondo ordine con “punto iniziale” in  $(0, 0)$ . Studiare la forma del grafico di  $f$  nel punto  $(0, 0, \ln 2)$ .

## 8.8

Stabilire se la funzione

$$f(x, y) := x^2 + 6xy + 2y^2$$

ammette massimo e minimo assoluti sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine. In caso affermativo, determinarne i valori.

## 8.9

Studiare i massimi e minimi, relativi e assoluti, della funzione

$$f(x, y) := \ln(1 + xy)$$

nel quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

## 8.10

Data la funzione

$$f(x, y) := e^{y-2x},$$

scrivere l'equazione del piano tangente al grafico  $G$  di  $f$  nel punto  $(1, 2, 1)$ . Descrivere infine la forma di  $G$  nello stesso punto (convesso, concavo, a sella).

## 8.11

Studiare i massimi e i minimi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy$$

ristretta all'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq x < 1\}.$$



## 8.12

Dimostrare che la funzione

$$f(x, y) := \frac{x^2 - 3y^2 + 8xy}{2 - x^2 - y^2}$$

ammette massimo e minimo assoluti sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine e quindi determinarne i valori.

## 8.13

Data la funzione

$$f(x, y) := \sin(xy + x^3 + y^3), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

determinare la forma del grafico di  $f$  nel punto  $(0, 0, 0)$ .

## 8.14

Data la funzione

$$f(x, y) := \ln(1 + x^2 + y^2), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

scrivere l'espressione del polinomio di Taylor di secondo grado con "punto iniziale" in  $(1, 1)$ . Calcolare il valore di tale polinomio in  $(0, 0)$ .

## 8.15

Considerata la funzione

$$(x, y) \mapsto f(x, y) := \frac{x^2 + 2xy + y^2}{1 + x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

verificare che si ha

$$\min_{S^1} f + \max_{S^1} f = 1.$$

## 8.16

Scrivere la formula di Taylor della funzione

$$f(x, y) := \cos(x + y^3 + y + x^5 y^2), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

nel punto  $(0, 0)$  e stabilire in tal punto la forma del grafico di  $f$ .

## 8.17

Provare che la funzione

$$\varphi(x, y, z) := x - y + z, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

ristretta all'insieme dei punti  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tali che

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 1$$

ha massimo e minimo assoluti. Utilizzare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange per determinarli.

[Il valore minimo di  $\varphi|_{F^{-1}(0)}$  è -1, conseguito nel punto  $(0, 1, 0)$ ; Il valore massimo di  $\varphi|_{F^{-1}(0)}$  è 5/3, conseguito nel punto  $(2/3, -1/3, 2/3)$ ]

## Chapter 9

# Serie di Fourier, spazi $L^p$

### 9.1

Sia  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$  definita come segue:

$$f(x) := \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 1 & \text{se } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

- Scrivere l'espressione dei coefficienti  $\alpha_k[f]$ , relativi allo sviluppo in serie di Fourier di soli coseni.
- Descrivere la convergenza di  $F_c[f]$  e disegnare il grafico di quest'ultima.
- Dare un esempio di intervallo sul quale  $F_c[f]$  converge uniformemente.

### 9.2

Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{se } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Scrivere l'espressione dei coefficienti di Fourier  $\beta_k[f]$ , relativi alla serie di soli seni. Discutere la convergenza puntuale della serie stessa e, infine, dare un esempio di intervallo sul quale la convergenza è uniforme.

### 9.3

Data la funzione

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 1 & \text{se } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

scriverne la serie di Fourier di soli seni e dire come questa converge alla funzione stessa.

### 9.4

Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ x & \text{se } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Determinarne poi la serie di Fourier e dire come questa converge alla funzione stessa.

### 9.5

Scrivere la serie di Fourier di soli seni relativa alla funzione coseno e discuterne la convergenza.

### 9.6

Sia data la funzione

$$f : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := \pi - x.$$

Determinare l'espressione dei coefficienti di Fourier  $\alpha_k[f]$ , relativi alla serie di soli coseni e discutere la convergenza della serie stessa.

### 9.7

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $2\pi$ -periodica tale che

$$f(x) = \begin{cases} -\pi + x & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ \pi + x & \text{se } x \in [0, \pi). \end{cases}$$

Scrivere la serie di Fourier di  $f$  e discuterne la convergenza.

$$[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)]$$

## 9.8

Si considerino le due funzioni  $2\pi$ -periodiche  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- Stabilire se  $f$  e  $g$  siano o meno regolari a tratti;
- Elencare le proprietà relative alla convergenza delle serie di Fourier di  $f$  e di  $g$ , in base a quanto stabilito nel punto precedente e alla teoria della serie di Fourier svolta nel corso.

[  $f$  non è r.a.t.;  $g$  è r.a.t.; (siano  $\Sigma_f$  e  $\Sigma_g$ , risp. la serie di F. di  $f$  e la serie di F. di  $g$ )  $\Sigma_g$  converge totalmente in  $L^\infty(\mathbb{R})$  (quindi anche uniformemente, puntualmente, in  $L^2(-\pi, \pi)$ );  $\Sigma_f$  converge in  $L^2(-\pi, \pi)$  a  $f|_{(-\pi, \pi)}$ ;  $\Sigma_f$  converge puntualmente q.o. a  $f$  ]

## 9.9

Scrivere la serie di Fourier di soli seni relativa alla funzione

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, \pi/2) \\ 0 & \text{se } x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

e descriverne le proprietà di convergenza.

[  $b_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k}$ ,  $b_{2k+1} = \frac{2(-1)^k}{(2k+1)^2\pi}$ ; La serie di Fourier di  $f$  converge a  $f$  in  $L^2$  e puntualmente ovunque. Indicando con  $S(x)$  la somma della serie in  $x$ , si ha:  $S(x) = x$  se  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ ,  $S(x) = 0$  se  $x \in [-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ ,  $S(-\pi/2) = -\pi/4$ ,  $S(\pi/2) = \pi/4$ . ]

## 9.10

Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni  $2\pi$ -periodiche tali che:

- La funzione  $f$  è pari e  $f(t) = t^{3/4}$  per ogni  $t \in [0, \pi]$ ;
- La funzione  $g$  è dispari e  $g(t) = t^{-1/4}$  per ogni  $t \in [0, \pi]$ .

Verificare che  $g \in L^2(-\pi, \pi)$ . Inoltre, indicati con  $a_n$  i coefficienti della serie di Fourier di  $f$  (soli coseni!) e con  $b_n$  i coefficienti della serie di Fourier di  $g$  (soli seni!), provare che vale l'identità

$$a_n = -\frac{3}{4n}b_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

## 9.11

In riferimento alla serie di Fourier della funzione

$$f(x) := \begin{cases} \sin x & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ \cos x & \text{se } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

calcolarne i coefficienti  $a_n$  (per  $n \geq 0$ ) e descriverne la convergenza.

[ $a_0 = -2/\pi$ ;  $a_1 = 1/2$ ;  $a_n = 2/(n^2 - 1)\pi$  se  $n \geq 2$  è pari;  $a_n = 0$  se  $n \geq 2$  è dispari.]

## 9.12

Provare che:

- Non esistono polinomi di primo grado propri (i.e.  $bx + c$  con  $b \neq 0$ ) ortogonali alla funzione  $\sin x$  in  $L^2(-\pi, \pi)$ ;
- Un polinomio di secondo grado proprio (i.e.  $ax^2 + bx + c$  con  $a \neq 0$ ) è ortogonale alla funzione  $\sin x$  in  $L^2(-\pi, \pi)$  se e solo se  $b = 0$ .

Infine:

- Determinare gli elementi della famiglia  $\{\cos^k x, \sin^k x\}_{k=1}^{+\infty}$  che sono ortogonali alla funzione  $\sin x$  in  $L^2(-\pi, \pi)$ .

[ Ultimo punto: Gli elementi della famiglia assegnata sono tutti ortogonali a  $\sin x$ , eccetto le funzioni  $\sin^k x$  con  $k$  dispari ]

### 9.13

Descrivere la convergenza della serie di Fourier della funzione  $2\pi$ -periodica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

[ Convergenza puntuale: a  $f(x)$  se  $x \neq k\pi$ , a  $3/2$  se  $x = 2k\pi$ , a  $1$  se  $x = (2k + 1)\pi$ . Inoltre la serie di Fourier converge in  $L^2(-\pi, \pi)$  e non converge in  $L^\infty(\mathbf{R})$ . ]

### 9.14

Scrivere la serie di Fourier della funzione  $2\pi$ -periodica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$f(x) := \begin{cases} \pi & \text{se } x \in [-\pi, -\pi/2) \\ -x & \text{se } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ -\pi & \text{se } x \in (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

e discutere in seguito la convergenza di tale serie.

[ Convergenza puntuale: a  $f(x)$  se  $x \neq k\pi/2$ , a  $0$  se  $x = k\pi$ , a  $3\pi/4$  se  $x = 2k\pi - \pi/2$ , a  $-3\pi/4$  se  $x = 2k\pi + \pi/2$ . Inoltre la serie di Fourier converge in  $L^2(-\pi, \pi)$  e non converge in  $L^\infty(\mathbf{R})$ . ]

### 9.15

Ricavare la serie di Fourier della funzione  $|\sin|$  e descrivere le sue proprietà di convergenza.

[  $\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)} \cos(2kx)$ ; converge totalmente in  $L^\infty(\mathbb{R})$ , quindi anche uniformemente in  $\mathbb{R}$ , puntualmente in  $\mathbb{R}$  e in  $L^2(-\pi, \pi)$ . ]

### 9.16

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione dispari e  $2\pi$ -periodica tale che

$$f(t) = \min\{\pi/2, \pi - t\}, \quad t \in (0, \pi].$$

Relativamente alla serie di Fourier di  $f$ , determinarne i coefficienti e descriverne le proprietà di convergenza.

[*Convergenza:* Converge incondizionatamente a  $f$  in  $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$ . Posto  $D := \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  e indicata con  $S$  la somma della serie di Fourier, si ha  $S|_{\mathbb{R} \setminus D} = f|_{\mathbb{R} \setminus D}$  e  $S|_D = 0$ . Converge uniformemente a  $f$  negli insiemi del tipo  $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi - \varepsilon, 2k\pi + \varepsilon)$  con  $\varepsilon \in (0, \pi)$ .

*Coefficienti:*  $a_n = 0$  per ogni  $n \geq 0$ .  $b_n = 1/n$  per ogni  $n \geq 1$  pari.  $b_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} + \frac{2(-1)^k}{(2k+1)^2\pi}$  per ogni  $k \geq 0$ .]

## 9.17

Si consideri la funzione pari  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$f(t) = \max \left\{ \frac{\pi}{2} - t, 0 \right\}, \quad t \in [0, \pi].$$

Dopo aver tracciato il grafico di  $f$ , calcolare i coefficienti e descrivere le proprietà di convergenza della serie di Fourier di  $f$ .

[*Convergenza:* Converge incondizionatamente a  $f$  in  $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$ . Converge uniformemente a  $f$ .

*Coefficienti:*  $b_n = 0$  per ogni  $n \geq 1$ .  $a_0 = \pi/4$ . Se  $n \geq 1$  è dispari allora  $a_n = 2/(\pi n^2)$ , mentre  $a_{2k} = (1 - (-1)^k)/(2\pi k^2)$  per ogni  $k \geq 1$ .]



## Chapter 10

# Successioni e serie di funzioni generiche, serie di potenze

### 10.1

Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(x^2 + 1)}{n^3 x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Studiare la convergenza puntuale di tale serie;
- Provare che essa converge totalmente in ogni insieme del tipo

$$(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$$

con  $a > 0$ ;

- Cosa si può dire della continuità della funzione somma?

[La serie diverge in  $x = 0$ , converge in ogni  $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ; La funzione somma è continua in  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ .]

### 10.2

Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin(1/n) (2x + 1)^n.$$

[  $(-1, 0)$  ]

### 10.3

Studiare la convergenza uniforme e puntuale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (nx^{2n} + n^{-3})^{1/2}.$$

[Converge puntualmente in  $(-1, 1)$ ; converge totalmente in  $L^\infty([-r, r])$  per ogni  $r \in (0, 1)$ ]

### 10.4

Descrivere convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2 - 1} (\sin x)^n.$$

[Insieme di convergenza puntuale:  $\mathbf{R} \setminus \{\pi/2 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ]

### 10.5

Data la successione di funzioni

$$f_n(x) := nxe^{1-nx}, \quad x \in [0, +\infty) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

provare che:

- $\{f_n\}$  converge puntualmente a 0;
- $\{f_n\}$  non converge uniformemente;
- Se  $a > 0$  allora la successione  $\{f_n|_{[a, +\infty)}\}$  converge uniformemente.

### 10.6

Provare che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left[ \sin\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{1}{n^{|x|}} \right], \quad x \in \mathbb{R}$$

- converge puntualmente in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- converge totalmente in  $L^\infty([a, b])$ , per ogni  $0 < a < b < +\infty$ .

## 10.7

Descrivere le proprietà di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n+1} n (\sin x)^n.$$

[ La serie converge puntualmente in  $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  e totalmente (rispetto a  $L^\infty$ ) negli insiemi del tipo  $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\frac{\pi}{2} + k\pi - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + k\pi + \varepsilon]$ , con  $\varepsilon > 0$ . ]

## 10.8

Studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

[Converge puntualmente in  $[-1, 1]$ . Converge totalmente in  $(L^\infty([-r, r]), \|\cdot\|_{\infty, [-r, r]})$  (e quindi uniformemente in  $[-r, r]$ ), per ogni  $r \in (0, 1)$ .]

## 10.9

Studiare la convergenza puntuale e  $L^\infty$  della successione di funzioni  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) definite come segue:

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{e^{nx}}{x+e^n} & \text{se } x \neq -e^n \\ 0 & \text{se } x = -e^n. \end{cases}$$

[La successione converge puntualmente in  $(-\infty, 1]$  alla funzione  $f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  identicamente nulla eccetto che per  $x = 1$ , in cui vale 1. La successione converge in  $L^\infty([a, b])$  con  $-\infty < a < b < 1$ .]

## Chapter 11

# Equazioni differenziali ordinarie

### 11.1

Usare i teoremi generali provati nel corso per dimostrare l'esistenza della soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \frac{x}{x-1} \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

Infine determinare esplicitamente tale soluzione massimale.

$$[ y(x) = x \ln(x - 1) ]$$

### 11.2

Determinare la soluzione generale della seguente equazione differenziale ordinaria lineare

$$y''(x) - 3y'(x) + \frac{9}{4}y(x) = \frac{9}{4}x + 6.$$

Ricavare poi la soluzione tale che  $y(0) = y(1) = 5$ .

$$[\text{Soluz. generale: } C_1 e^{3x/2} + C_2 x e^{3x/2} + x + 4; \text{ Soluz. particolare: } e^{3x/2} - x e^{3x/2} + x + 4]$$

### 11.3

Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale ordinaria lineare

$$2y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 9x - 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Scrivere infine il sistema differenziale del primo ordine, in forma normale, equivalente a tale equazione differenziale.

[Soluz. generale:  $C_1 e^{-3x/2} \cos(3x/2) + C_2 e^{-3x/2} \sin(3x/2) + x - 1$ ]

## 11.4

Determinare la soluzione di

$$y'(x) + y(x) \cos x = \cos x$$

tale che  $y(\pi/2) = 2$ .

$[1 + e^{1-\sin x}]$

## 11.5

Determinare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = \frac{\cos x}{x}, \quad x > 0$$

tale che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1.$$

$[\frac{\sin x}{x}]$

## 11.6

Ricavare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) - 2y'(x) = -4x, \quad x \in \mathbb{R}$$

e in seguito determinare la soluzione tale che  $y(0) = y'(0) = 0$ .

$[y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + x^2 + x ; y(x) = \frac{1}{2} - \frac{e^{2x}}{2} + x^2 + x]$