ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2018/2019

11 febbraio 2020 - V appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Sia S l'insieme dei punti

$$(\sin\theta\cos\theta\cos\psi, \sin\theta\cos\theta\sin\psi, \sin^2\theta) \in \mathbb{R}^3$$

con

$$\theta \in [0, \pi/2], \quad \psi \in [0, 2\pi].$$

- Provare che S è una superficie di rotazione intorno all'asse z;
- Descrivere e rappresentare graficamente l'intersezione di S con il piano yz;
- Indicato con E la regione limitata di spazio tale che $\partial E = S$, calcolare $L^3(E)$.

Risoluzione. Osserviamo che la funzione

$$\sin^2\theta, \quad \theta \in [0, \pi/2]$$

è monotona crescente e la sua immagine è l'intervallo $[0, 1]$. Allora, considerato $z \in [0, 1]$, esiste unico $\theta = \theta(z) \in [0, \pi/2]$ tale che $\sin^2\theta = z$ e quindi si ha anche

$$\sin\theta\cos\theta = [z(1-z)]^{1/2}.$$

Ne segue che, la proiezione nel piano xy del punto

$$(\sin\theta\cos\theta\cos\psi, \sin\theta\cos\theta\sin\psi, \sin^2\theta)$$

è

$$(\sin\theta\cos\theta\cos\psi, \sin\theta\cos\theta\sin\psi) = ([z(1-z)]^{1/2}(\cos\psi, \sin\psi).$$

Pertanto S_z è la circonferenza di raggio $[z(1-z)]^{1/2}$ centrata nell'origine, il che dimostra che S è effettivamente una superficie di rotazione intorno all'asse z. Ciò implica che E_z è il disco di raggio $[z(1-z)]^{1/2}$ centrato nell'origine. A questo punto risulta facile calcolare $L^3(E)$, usando il teorema di Fubini:

$$\begin{aligned} L^3(E) &= \int_E 1\, dL^3 = \int_0^1 \left(\int_{E_z} 1\, dL^2(x,y) \right) dz = \int_0^1 L^2(E_z)\, dz \\ &= \int_0^1 z(1-z)\pi\, dz = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Dalle considerazioni precedenti segue anche che l'intersezione di S con il piano yz è la curva di equazione

$$|y| = [z(1-z)]^{1/2}.$$

2. Per ogni $m \in \mathbb{R}$, si consideri la superficie

$$S_m := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = x^2 + y^2 - 1,\ z \leq 2my\}.$$

- Descrivere (anche graficamente) la proiezione di S_m nel piano xy e cioè l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x, y, z) \in S_m$ per qualche $z \in \mathbb{R}\}$;
- Calcolare l'integrale

$$I(m) := \int_{S_m} \frac{z + m^2 - 2my + 1}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^{1/2}}\, dH^2(x, y, z);$$

- Tracciare un grafico qualitativo della funzione $m \mapsto I(m)$ e stabilire per quale m il valore $I(m)$ è minimo.

Risoluzione. Osserviamo che $z = x^2 + y^2 - 1$ è l'equazione di un paraboloide convesso di vertice $(0, 0, -1)$, mentre $z \leq 2my$ è l'equazione del semispazio inferiore al piano di equazione $z = 2my$. Quindi l'insieme

$$D_m := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x, y, z) \in S_m \text{ per qualche } z \in \mathbb{R}\}$$

è la regione limitata di piano delimitata dalla curva di equazione

$$x^2 + y^2 - 1 = 2my$$

cioè

$$x^2 + (y - m)^2 = 1 + m^2$$

da cui vediamo che D_m è il disco di raggio $(1 + m^2)^{1/2}$ centrato in $(0, m)$. Poiché S_m è il grafico di $f(x, y) := x^2 + y^2 - 1$ su D_m, possiamo considerare la $(2, 3)$-parametrizzazione regolare cartesiana di S_m definita come segue

$$\varphi(x, y) := (x, y, f(x, y)) = (x, y, x^2 + y^2 - 1), \quad (x, y) \in D_m$$

e dato che $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, si ha anche

$$J\varphi(x, y) = \left[1 + |\nabla f(x, y)|^2\right]^{1/2} = \left(1 + 4x^2 + 4y^2\right)^{1/2}, \quad (x, y) \in D_m.$$

Dalla formula dell'area otteniamo allora

$$\begin{aligned} I(m) &= \int_{S_m = \varphi(D_m)} \frac{z + m^2 - 2my + 1}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^{1/2}}\, dH^2(x, y, z) \\ &= \int_{D_m} \frac{x^2 + y^2 - 1 + m^2 - 2my + 1}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^{1/2}} (1 + 4x^2 + 4y^2)^{1/2} dL^2(x, y) \\ &= \int_{D_m} x^2 + (y - m)^2 dL^2(x, y). \end{aligned}$$

Applicando di nuovo la formula dell'area col cambio di variabili (coordinate polari)

$$\psi(\rho,\theta) := (0,m) + (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta), \quad (\rho,\theta) \in [0,(1+m^2)^{1/2}] \times [0,2\pi]$$

e usando in seguito il teorema di Fubini, otteniamo (osserviamo che $J\psi(\rho,\theta) = \rho$)

$$\begin{aligned} I(m) &= \int_{[0,(1+m^2)^{1/2}]\times[0,2\pi]} (\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta)\rho\, dL^2(\rho,\theta) \\ &= \int_{[0,(1+m^2)^{1/2}]\times[0,2\pi]} \rho^3\, dL^2(\rho,\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{(1+m^2)^{1/2}} \rho^3 \right) d\theta \\ &= 2\pi \left(\frac{\rho^4}{4} \right)_{\rho=0}^{\rho=(1+m^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\pi}{2}(1+m^2)^2. \end{aligned}$$

Si trova così che $I(m)$ è minima per $m = 0$, con $I(0) = \pi/2$.

3. Per ogni $n = 1, 2, \ldots$, si consideri la funzione

$$f_n(x) := e^{-n\left(x-\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{|x|}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Descrivere:

- La convergenza puntuale di $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$;
- La convergenza uniforme di $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ negli intervalli aperti di $\mathbb{R}$.

Risoluzione.

Convergenza puntuale. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} e^{-1/n} = 1.$$

Inoltre, se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n\to\infty} -n\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 = -\infty$ e quindi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Quindi la successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente alla funzione $\chi_{\{0\}}$.

Convergenza uniforme negli intervalli aperti. Se I indica un intervallo aperto di $\mathbb{R}$, si hanno le seguenti proprietà:

- Se $0 \in I$, la successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ non converge uniformemente in I (in quanto la funzione limite $\chi_{\{0\}}$ non è continua in 0);
- Se $0 \notin I$ e I non è limitato, allora

  $$\sup_{x\in I} |f_n(x) - \chi_{\{0\}}(x)| = \sup_{x\in I} f_n(x) \geq \sup_{x\in I} \frac{|x|}{n} = +\infty.$$

  In particolare, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ non converge uniformemente in I;
- Sia $I = (0, b)$ con $0 < b < +\infty$. Poiché f_n è continua, si ha

  $$\sup_{x\in I} |f_n(x) - \chi_{\{0\}}(x)| = \sup_{x\in(0,b)} f_n(x) \geq f_n(0) = e^{-1/n}$$

  per cui $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ non converge uniformemente in I. Analogamente si prova che $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ non converge uniformemente in $I = (a, 0)$ con $-\infty < a < 0$;
- Se $I = (a, b)$ con $0 < a < b < +\infty$, allora si ha (per n sufficientemente grande)

  $$\begin{aligned}\sup_{x\in I} |f_n(x) - \chi_{\{0\}}(x)| &= \sup_{x\in(a,b)} f_n(x) \\ &\leq \sup_{x\in(a,b)} e^{-n\left(x-\frac{1}{n}\right)^2} + \sup_{x\in(a,b)} \frac{|x|}{n} \\ &= e^{-n\left(a-\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{b}{n}.\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - \chi_{\{0\}}(x)| = 0$$

e cioè $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente in I. Analogamente si prova che $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente in $I = (a, b)$ con $-\infty < a < b < 0$.