ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2018/2019

15 gennaio 2020 - IV appello

* * *

Risoluzione degli esercizi

1. Definiamo

$$E_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\, y \in [-x^2, x^2]\},$$
$$E_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\, x \geq 1\}$$

e

$$E := E_1 \cup E_2.$$

Rappresentare graficamente l'insieme E e usare la formula di Green per calcolare

$$\int_{(\partial E, \tau)} \big(-y(x-1)^2 + \ln(1+x)\,,\, xy^2 + \cos y\big)$$

dove τ è il campo vettoriale unitario che orienta positivamente ∂E.

Risoluzione. Posto

$$I := \int_{(\partial E, \tau)} \big(-y(x-1)^2 + \ln(1+x)\,,\, xy^2 + \cos y\big)\,,$$

per la formula di Green si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_E \frac{\partial}{\partial x}(xy^2 + \cos y) - \frac{\partial}{\partial y}(-y(x-1)^2 + \ln(1+x))\, dL^2(x,y) \\ &= \int_E y^2 + (x-1)^2\, dL^2(x,y) \end{aligned}$$

e cioè

$$I = I_1 + I_2$$

con

$$I_1 := \int_{E_1} y^2 + (x-1)^2\, dL^2(x,y), \quad I_2 := \int_{E_2} y^2 + (x-1)^2\, dL^2(x,y).$$

Calcoliamo questi due integrali:

- Dal teorema di Fubini otteniamo

$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_{-x^2}^{x^2} y^2 + (x-1)^2 \, dy \right) dx = \int_0^1 \frac{2}{3} x^6 + 2x^2 (x-1)^2 \, dx = \frac{17}{105};$$

- Considerando la $(2,2)$-parametrizzazione regolare di E_2

$$\varphi(\rho, \theta) = (1 + \rho \cos \theta, \rho \sin \theta), \quad (\rho, \theta) \in R := [0,1] \times [-\pi/2, \pi/2]$$

  e applicando la formula ell'area, troviamo

$$I_2 := \int_{\varphi(R)} y^2 + (x-1)^2 \, dL^2(x,y) = \int_R \rho^3 dL^2(\rho, \theta)$$

  e quindi, per il teorema di Fubini

$$I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho \right) d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Si conclude che

$$I = \frac{17}{105} + \frac{\pi}{4}.$$

2. Un piano Π parallelo al piano xy, si muove (rimanendo sempre parallelo al piano xy) in modo che all'istante t la terza coordinata dei suoi punti sia $2t$. Contemporaneamente, un punto $P \in \Pi$ si muove lungo il grafico della funzione sin e la sua prima coordinata all'istante t vale t^2.

- Scrivere un'espressione per la posizione del punto P all'istante t;
- Indicata con C la curva percorsa da P quando t passa dall'istante 0 all'istante 1, provare che la funzione

$$f(x,y,z) := \frac{(y+\cos x)z}{[x(2-y^2)+1]^{1/2}}$$

  è ben definita e limitata in C;
- Calcolare $\int_C f\,dH^1$.

Risoluzione. Dalla descrizione iniziale segue subito che la posizione di P all'istante t è

$$\gamma(t) = (t^2, \sin t^2, 2t).$$

Allora, per ogni $t \in [0,1]$, si ha

$$f(\gamma(t)) = \frac{(\sin t^2 + \cos t^2)2t}{[t^2(2-\sin^2 t^2)+1]^{1/2}}.$$

Poiché $\sin^2 t^2 \leq 1$, il denominatore di tale espressione maggiore o uguale di 1 e quindi

$$0 \leq f(\gamma(t)) \leq (\sin t^2 + \cos t^2)2t \qquad \text{(per ogni } t \in [0,1]).$$

Inoltre l'ultimo membro di questa disuguaglianza è una funzione continua e perciò anche limitata in $[0,1]$. Ciò implica la limitatezza di f in $C = \gamma([0,1])$. Per concludere, osserviamo che

$$|\gamma'(t)| = |(2t, 2t\cos t^2, 2)| = 2[t^2(1+\cos^2 t^2)+1]^{1/2}$$

e dunque, per la formula dell'area e per il teorema fondamentale del calcolo:

$$\begin{aligned}
\int_C f\,dH^1 &= \int_{[0,1]} f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dL^1(t) \\
&= \int_0^1 \frac{(\sin t^2+\cos t^2)2t}{[t^2(2-\sin^2 t^2)+1]^{1/2}}\, 2[t^2(1+\cos^2 t^2)+1]^{1/2}\,dt \\
&= 2\int_0^1 (\sin t^2+\cos t^2)2t\,dt = 2(\sin t^2 - \cos t^2)_0^1 \\
&= 2(\sin 1 - \cos 1 + 1).
\end{aligned}$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica, dispari e tale che

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x} & \text{se } x \in (0, \pi/2] \\ 0 & \text{se } x \in (\pi/2, \pi). \end{cases}$$

- Provare che $f \in L^2(-\pi, \pi)$;
- Descrivere le proprietà di convergenza della serie di Fourier di f;
- Calcolare a_n $(n = 0, 1, \ldots)$;
- Calcolare b_1 e b_2.

Risoluzione. Poiché $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$, esiste $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ tale che

$$f(x) \leq 3/2, \text{ per ogni } x \in (0, \varepsilon).$$

Inoltre, $f|_{[\varepsilon,\pi/2]}$ è continua e quindi limitata (essendo $[\varepsilon, \pi/2]$ compatto). Osserviamo anche che $f|_{[0,\pi]}$ è non negativa. Pertanto esiste una costante positiva K tale che

$$0 \leq f(x) \leq K, \text{ per ogni } x \in [0, \pi].$$

Ma essendo f anche 2π-periodica e dispari, per ipotesi, si ha

$$|f(x)| \leq K, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

In particolare $f \in L^2(-\pi, \pi)$.

Allora la serie di Fourier di f converge a f in $L^2(-\pi, \pi)$ e quindi anche puntualmente quasi ovunque in $\mathbb{R}$. Peraltro è facile verificare che f è regolare a tratti. infatti f è ovviamente continua a tratti e l'insieme D dei punti di discontinuità di f in $[-\pi, \pi)$ coincide con $\{0, \pm\pi/2\}$. Inoltre, per ogni $x \in (0, \pi/2)$ si ha

$$f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$$

per cui, grazie al teorema di de l'Hospital, vale

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{x \sin x}{2\sin x \cos x} = 0$$

e dunque f ha derivata continua e limitata in $[-\pi, \pi) \setminus D$. Allora la serie di Fourier di f, calcolata in x, converge puntualmente a:

- $f(x)$, per ogni $x \notin \pm\pi/2 + \mathbb{Z}2\pi$;
- $\pi/4$, per ogni $x \in \pi/2 + \mathbb{Z}2\pi$;
- $-\pi/4$, per ogni $x \in -\pi/2 + \mathbb{Z}2\pi$.

Inoltre la serie di Fourier di f converge uniformemente a f in ogni intervallo chiuso $[a, b]$ in cui f è continua e cioè nei seguenti casi:

- Se $a > -\pi/2$ e $b < 0$ (e periodicizzati);
- Se $a > 0$ e $b < \pi/2$ (e periodicizzati);
- Se $a > \pi/2$ e $b < 3\pi/2$ (e periodicizzati).

Poiché f è dispari, si ha naturalmente

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Inoltre

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t} \sin t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} t \, dt = \frac{\pi}{4}$$

e (con semplici calcoli)

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(2t) \, dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t} \sin t \cos t \, dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} t \cos t \, dt \\ &= 2 - \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$