Analisi Matematica B

* * *

Prova scritta del 9 settembre 2019

Risoluzione degli esercizi

1. Rappresentare graficamente l'insieme

$$E := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4,\ z \in [0,2] \right\}$$

e calcolare l'integrale

$$\int_E xyz \, d\mathcal{L}^3(x,y,z).$$

Risoluzione. Osserviamo che per ogni $z \in [0,2]$ si ha

$$E_z = \Omega := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4 \right\},$$

mentre $E_z = \emptyset$ se $z \in \mathbb{R} \setminus [0,2]$. Se poniamo

$$I := \int_E xyz \, dL^3(x,y,z), \quad J := \int_\Omega xy \, dL^2(x,y),$$

per il teorema di Fubini, si ha

$$I = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{E_z} xyz \, dL^2(x,y) \right) dL(z) = \int_0^2 z \left(\int_\Omega xy \, dL^2(x,y) \right) dz = J \int_0^2 z \, dz$$

cioè

$$I = 2J. \tag{1}$$

Al fine del calcolo di J, consideriamo il settore di corona circolare

$$C := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s \geq 0,\ t \geq 0,\ 1 \leq s^2 + t^2 \leq 4\}$$

e la $(2,2)$-parametrizzazione regolare di Ω

$$\varphi : C \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(s,t) := (2s, t).$$

Come si verifica facilmente, per ogni (s,t) interno a C, si ha $J\varphi(s,t) = 2$. Quindi, per la formula dell'area, si ha

$$J = \int_{\varphi(C)} xy \, dL^2(x,y) = \int_C 4st \, dL^2(s,t).$$

Usando di nuovo la formula dell'area per passare alle coordinate polari e il teorema di Fubini, ricaviamo

$$
\begin{aligned}
J &= 4 \int_{[0,\pi/2]\times[1,2]} \rho^3 \cos\theta \sin\theta \, dL^2(\theta,\rho) \\
&= 4 \int_1^2 \rho^3 \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \right) d\rho \\
&= (\rho^4)_1^2 \int_0^{\pi/2} D\left(\frac{\sin^2\theta}{2} \right) \, d\theta \\
&= \frac{15}{2}.
\end{aligned}
$$

Da questa e da (1), otteniamo finalmente $I = 15$.

2. Calcolare
$$\int_S \left(\frac{2-z^2}{x^2+y^2}\right) dH^2(x,y,z)$$
dove S è la superficie ottenuta facendo compiere alla curva $\{(0,y,\sin y) \,|\, y \in [2\pi, 4\pi]\}$ un giro completo intorno all'asse z.

Risoluzione. Consideriamo la seguente $(2,3)$-parametrizzazione regolare di S:
$$\varphi : R := [2\pi, 4\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \sin\rho).$$
Un semplice calcolo mostra che
$$J\varphi(\rho,\theta) = \|D_1\varphi(\rho,\theta) \times D_2\varphi(\rho,\theta)\| = \rho(1+\cos^2\rho)^{1/2}$$
per ogni (ρ,θ) interno ad R. Quindi, dalla formula dell'area, si ricava
$$\begin{aligned} I :&= \int_{S=\varphi(R)} \left(\frac{2-z^2}{x^2+y^2}\right) dH^2(x,y,z) \\ &= \int_R \left(\frac{2-\sin^2\rho}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}\right) \rho(1+\cos^2\rho)^{1/2} dL^2(\rho,\theta) \\ &= \int_R \frac{(1+\cos^2\rho)^{3/2}}{\rho} dL^2(\rho,\theta). \end{aligned} \tag{2}$$
Infine, per il teorema di Fubini, si ha
$$I = \int_0^{2\pi}\left(\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{(1+\cos^2\rho)^{3/2}}{\rho} d\rho\right) d\theta = 2\pi \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{(1+\cos^2\rho)^{3/2}}{\rho} d\rho \tag{3}$$
e questa è la conclusione, in quanto l'ultimo integrale non risulta calcolabile con il consueto metodo elementare basato sul teorema fondamentale del calcolo.

NOTA BENE. La sgradevole situazione presentatasi nel passaggio conclusivo della risoluzione è dovuta alla cancellazione involontaria dell'esponente $1/2$ nell'integrando. In effetti l'esercizio che il docente voleva proporre era il calcolo dell'integrale
$$\int_S \left(\frac{2-z^2}{x^2+y^2}\right)^{1/2} dH^2(x,y,z).$$
In questo caso, al posto di (2), avremmo ricavato
$$\begin{aligned} I :&= \int_{S=\varphi(R)} \left(\frac{2-z^2}{x^2+y^2}\right)^{1/2} dH^2(x,y,z) \\ &= \int_R \left(\frac{2-\sin^2\rho}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}\right)^{1/2} \rho(1+\cos^2\rho)^{1/2} dL^2(\rho,\theta) \\ &= \int_R (1+\cos^2\rho) dL^2(\rho,\theta) \end{aligned}$$

e infine, al posto di (3):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{2\pi}^{4\pi} (1 + \cos^2 \rho) d\rho \right) d\theta = 2\pi \int_{2\pi}^{4\pi} (1 + \cos^2 \rho) d\rho \\ &= 2\pi \left(2\pi + \int_{2\pi}^{4\pi} \cos^2 \rho \, d\rho \right) = 2\pi \, (2\pi + \pi) = 6\pi^2. \end{aligned}$$

3. Studiare le proprietà di convergenza della successione di funzioni $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, dove

$$f_n(x) := \frac{nx+1}{n(x^2+1)+x}.$$

Risoluzione. Osserviamo prima di tutto che il denominatore della frazione che definisce f_n è il polinomio di secondo grado nx^2+x+n avente come discriminante il numero $1-4n^2$, il quale è negativo per ogni n. Quindi le funzioni f_n hanno $\mathbb{R}$ come comune dominio di esistenza.

- Convergenza puntuale. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

  $$f_n(x) = \frac{x+1/n}{x^2+1+x/n}$$

  Quindi il dominio di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ è $\mathbb{R}$ e vale

  $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \frac{x}{x^2+1}$$

  per ogni $x \in \mathbb{R}$.

- Convergenza uniforme. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

  $$f_n(x) - f(x) = \frac{nx+1}{nx^2+x+n} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)(nx^2+x+n)} > 0$$

  e quindi anche

  $$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{(x^2+1)(nx^2+x+n)} \leq \frac{1}{nx^2+x+n}.$$

  Ma il valore minimo del polinomio $p_n(x) = nx^2+x+n$ è

  $$p_n\left(-\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n} + n = n - \frac{1}{4n} = \frac{4n^2-1}{4n} > 0$$

  per cui

  $$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{4n}{4n^2-1}$$

  per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ne segue che

  $$\|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq \frac{4n}{4n^2-1}$$

  da cui si ottiene

  $$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}} = 0.$$

  In altri termini, la successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$.