Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2018/2019

11 febbraio 2020 - V appello

1. Sia S l'insieme dei punti

$$(\sin\theta\cos\theta\cos\psi, \sin\theta\cos\theta\sin\psi, \sin^2\theta) \in \mathbb{R}^3$$

con

$$\theta \in [0, \pi/2], \quad \psi \in [0, 2\pi].$$

- Provare che S è una superficie di rotazione intorno all'asse z;
- Descrivere e rappresentare graficamente l'intersezione di S con il piano yz;
- Indicato con E la regione limitata di spazio tale che $\partial E = S$, calcolare $L^3(E)$.

2. Per ogni $m \in \mathbb{R}$, si consideri la superficie

$$S_m := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 - 1,\ z \leq 2my\}.$$

- Descrivere (anche graficamente) la proiezione di S_m nel piano xy e cioè l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in S_m \text{ per qualche } z \in \mathbb{R}\}$;
- Calcolare l'integrale

$$I(m) := \int_{S_m} \frac{z + m^2 - 2my + 1}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^{1/2}}\, dH^2(x, y, z);$$

- Tracciare un grafico qualitativo della funzione $m \mapsto I(m)$ e stabilire per quale m il valore $I(m)$ è minimo.

3. Per ogni $n = 1, 2, \ldots$, si consideri la funzione

$$f_n(x) := e^{-n\left(x - \frac{1}{n}\right)^2} + \frac{|x|}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Descrivere:

- La convergenza puntuale di $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$;
- La convergenza uniforme di $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ negli intervalli aperti di $\mathbb{R}$.