Prova scritta di

ANALISI MATEMATICA B
per il Corso di Laurea in Matematica
AA 2018/2019

15 gennaio 2020 - IV appello

1. Definiamo

$$E_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\, y \in [-x^2, x^2]\},$$

$$E_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\, x \geq 1\}$$

e

$$E := E_1 \cup E_2.$$

Rappresentare graficamente l'insieme E e usare la formula di Green per calcolare

$$\int_{(\partial E,\tau)} \big(-y(x-1)^2 + \ln(1+x)\,,\, xy^2 + \cos y\big)$$

dove τ è il campo vettoriale unitario che orienta positivamente ∂E.

2. Un piano Π parallelo al piano xy, si muove (rimanendo sempre parallelo al piano xy) in modo che all'istante t la terza coordinata dei suoi punti sia $2t$. Contemporaneamente, un punto $P \in \Pi$ si muove lungo il grafico della funzione sin e la sua prima coordinata all'istante t vale t^2.

- Scrivere un'espressione per la posizione del punto P all'istante t;
- Indicata con C la curva percorsa da P quando t passa dall'istante 0 all'istante 1, provare che la funzione

$$f(x,y,z) := \frac{(y + \cos x)z}{[x(2-y^2)+1]^{1/2}}$$

  è ben definita e limitata in C;
- Calcolare $\int_C f\, dH^1$.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica, dispari e tale che

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x} & \text{se } x \in (0, \pi/2] \\ 0 & \text{se } x \in (\pi/2, \pi). \end{cases}$$

- Provare che $f \in L^2(-\pi, \pi)$;
- Descrivere le proprietà di convergenza della serie di Fourier di f;
- Calcolare a_n $(n = 0, 1, \ldots)$;
- Calcolare b_1 e b_2.