LABORATORY OF DIDACTICS OF MATHEMATICS
DIARIO DEL CORSO
A.A. 2018/2019

SILVANO DELLADIO

19 febbraio 2019 [3 ore]

- Presentazione del corso.
- Il problema isoperimetrico (PI), prima parte.
  - Accenni storici. Formulazioni elementari, formulazioni avanzate (De Giorgi). Esempi di regioni piane "inadeguate" per il PI ($\mathbb{Q}^2$, bubble cluster).
  - Il teorema di Erone, dimostrazione elementare. Risoluzione del PI per i triangoli, attraverso la riduzione a un problema di minimo per una funzione di una variabile basata sul teorema di Erone.
  - Approfondimenti I. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange (TML), dimostrazione elementare nel caso speciale di due variabili e un vincolo. Dimostrazione del teorema di Erone, via teorema di Weierstrass e TML.

26 febbraio 2019 [6 ore]

- Il problema isoperimetrico, seconda parte.
  - Approfondimenti II. Risoluzione del problema isoperimetrico per i triangoli del piano, basata sul teorema di Weierstrass e (di nuovo) sul teorema di Erone.
  - Approfondimenti III. Applicazione del teorema di Erone alla dimostrazione della proprietà ottica (o bifocale) dell'ellisse.
  - Approfondimenti IV. Il teorema di Erone generalizzato (problema di tipo brachistocrona). Interpretazione alternativa: il problema del bagnino. Dimostrazione elementare, attraverso la riduzione a un problema di minimo per una funzione di una variabile. Dimostrazione basata sul teorema di Weierstrass e sul TML.

5 marzo 2019 [9 ore]

- Il problema isoperimetrico, terza parte.
  - Risoluzione elementare del problema isoperimetrico per i quadrilateri, usando il teorema di Erone.
  - Problema isoperimetrico per i poligoni con $2N$ lati:
    * Funzione area e idea della dimostrazione dell'esistenza via teorema di Weierstrass.
    * Se esiste un poligono massimale, allora esso è quello regolare (in tre passi: convessità, equilateralità, numero massimale di vertici, inscrizione nel disco).
  - Problema isoperimetrico generale. Sia $\mathcal{A}_p$ la famiglia dei sottoinsiemi aperti e connessi E del piano aventi frontiera di classe C^1 a tratti e tali che $\mathcal{H}^1(\partial E) = p$. Allora per ogni $E \in \mathcal{A}_p$ si ha
$$\mathcal{L}^2(E) \leq \mathcal{L}^2(D_p)$$
    dove D_p è il disco di perimetro p (dimostrazione basata sulla risoluzione del problema isoperimetrico nella famiglia dei $2N$-poligoni).

12 marzo 2019 [12 ore]

- Il problema isoperimetrico, quarta parte.
  - Simmetrizzazione di Steiner:
    (i) $\mathcal{L}^2(S_r(E)) = \mathcal{L}^2(E)$;
    (ii) $\mathcal{H}^1(\partial[S_r(E)]) \leq \mathcal{H}^1(\partial E)$; inoltre vale l'uguaglianza se e solo se E è simmetrico rispetto alla direzione di r.

    Dimostrazione nel caso che E sia una regione compresa fra due grafici di funzioni C^1 a tratti. Applicazione: se E_M è un insieme massimale in $\mathcal{A}_p$ (i.e. se $\mathcal{L}^2(E_M) = \sup_{E \in \mathcal{A}_p} \mathcal{L}^2(E)$) allora $E_M = D_p$.
  - Richiami dalla teoria L^2 della serie di Fourier. Identità di Parseval. Disuguaglianza isoperimetrica: Teorema di Hurwitz.

19 marzo 2019 [15 ore]

- Il problema isoperimetrico, quinta parte.
  - Conclusione della dimostrazione del Teorema di Hurwitz.
- Il problema della brachistocrona, prima parte.
  - Presentazione;

  - Deduzione del funzionale tempo;
  - Variazione prima del funzionale tempo, equazione di Eulero;
  - Osservazione: dall'equazione di Eulero segue subito che la funzione di cui è grafico la brachistocrona è positiva e concava in senso stretto (non contiene segmenti).

26 marzo 2019 [18 ore]

- Il problema della brachistocrona, seconda parte.
  - Deduzione dall'equazione di Eulero dell'equivalente condizione di brachistocrona;
  - Osservazioni conseguenti dalla condizione di brachistocrona:
    - La retta tangente alla brachistocrona nel suo punto iniziale è verticale;
    - Test di esclusione (segmento, arco di circonferenza, arco α-Hölderiano);
    - La curva cicloide: definizione e parametrizzazione. La curva cicloide verifica la condizione di brachistocrona.
  - La risoluzione di Johann Bernoulli e un percorso didattico ad essa relativo, inclusa la deduzione elementare della condizione di brachistocrona e della condizione di retta tangente iniziale verticale. Test di esclusione (segmento e arco di circonferenza). Particolari della metodologia didattica.
- Approfondimenti sulla curva cicloide.
  - Proprietà tautocrona della curva cicloide.

2 aprile 2019 [21 ore]

- Approfondimenti sulla curva cicloide.
  - Calcolo della lunghezza della curva cicloide.
  - Famiglia delle curve CSC (soddisfacenti la condizione di brachistocrona). Teorema di Benson.
  - Il pendolo cicloidale.
- Introduzione alla geometria della sfera: punti, rette, segmenti, poligoni, angoli, cerchi. Confronto fra geometria Euclidea e geometria sferica. Indipendenza del V postulato della geometria Euclidea. Il triangolo sferico: Formula dell'area e conseguenze.
- Introduzione alle simulazioni didattiche, descrizione del file della cronaca.