

**Diario di**  
**Analisi Matematica B**  
**Corso di Laurea in Matematica**  
**a.a. 2019/2020**

Silvano Delladio

February 20, 2020

## Contents

Chapter 1. Teoria della misura	5
1. Misure esterne, definizione e prime proprietà	5
2. Misure esterne metriche, Boreliane, Borel-regolari, di Radón	7
Chapter 2. Funzioni misurabili e integrale.	13
1. Funzioni misurabili.	13
2. Integrale: definizione e prime proprietà	14
3. Teoremi di convergenza integrale	18
4. Il teorema di Fubini	20
5. La formula dell'area	23
6. Formule di Gauss-Green	27
Chapter 3. Spazi $L^p$ e serie di Fourier	33
1. Spazi $L^p$	33
2. Serie di Fourier in uno spazio di Hilbert, un prontuario minimo (meno di così non si può...)	34
3. Convergenza puntuale della serie di Fourier per una funzione regolare a tratti	37
Chapter 4. Successioni e serie di funzioni	39
1. Successioni di funzioni	39
2. Serie di funzioni generiche	42
3. Serie di potenze	44
Chapter 5. Complementi	47
1. Equazioni differenziali ordinarie	47
2. Potenziale di un campo vettoriale	52
Bibliography	57

February 20, 2020

## CHAPTER 1

### Teoria della misura

[\* I settimana (16/09/2019); 4 \*]

#### 1. Misure esterne, definizione e prime proprietà

DEFINIZIONE 1.1. Una “misura esterna” sull’insieme  $X$  è una mappa  $\varphi : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  tale che

- (i)  $\varphi(\emptyset) = 0$ ;
- (ii)  $\varphi(E) \leq \varphi(F)$ , se  $E \subset F \subset X$ ;
- (iii)  $\varphi(\cup_j E_j) \leq \sum_j \varphi(E_j)$ , se  $\{E_j\}$  è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di  $X$ .

ESEMPIO 1.1.  $X \neq \emptyset$  e

$$\varphi(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } E = \emptyset \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo che se  $X$  contiene almeno due elementi  $a, b$ , allora

$$\varphi(\{a\} \cup \{b\}) = \varphi(\{a\}) = \varphi(\{b\}) = 1.$$

In particolare  $\varphi$  non è additiva (vale  $\varphi(\{a\} \cup \{b\}) < \varphi(\{a\}) + \varphi(\{b\})$ ).

ESEMPIO 1.2 (Misura esterna di Dirac).  $X \neq \emptyset$  e  $(x_0 \in X)$

$$\varphi(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 \notin E \\ 1 & \text{se } x_0 \in E. \end{cases}$$

ESEMPIO 1.3 (Misura esterna del conteggio).  $X \neq \emptyset$  e  $\varphi(E) := \#(E)$ .

OSSERVAZIONE 1.1. La “misura superiore di Peano-Jordan”, la “misura inferiore di Peano-Jordan” e la “misura di Peano-Jordan” non sono misure esterne.

DEFINIZIONE 1.2. Un insieme  $E \in 2^X$  è detto “misurabile (rispetto alla misura esterna  $\varphi$  su  $X$ )” se

$$(1.1) \quad \varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c)$$

per ogni  $A \in 2^X$ . La famiglia degli insiemi misurabili rispetto a  $\varphi$  è indicata con  $\mathcal{M}_\varphi$ .

OSSERVAZIONE 1.2. Grazie a (iii) di Definizione 1.1, la (1.1) si può sostituire con

$$\varphi(A) \geq \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c).$$

ESEMPIO 1.4. Negli esempi 1.1, 1.2, 1.3 si ha rispettivamente

$$\mathcal{M}_\varphi = \{\emptyset, X\}, \quad \mathcal{M}_\varphi = 2^X, \quad \mathcal{M}_\varphi = 2^X.$$

[\* II settimana (23/09/2019); 8 \*]

TEOREMA 1.1 (\*\*\*). Per una misura esterna  $\varphi$  su  $X$ , valgono i seguenti fatti:

- (1)  $\mathcal{M}_\varphi$  è  $c$ -chiusa;
- (2) Se  $E \in 2^X$  è tale che  $\varphi(E) = 0$ , allora  $E \in \mathcal{M}_\varphi$ . In particolare  $\emptyset \in \mathcal{M}_\varphi$  (quindi anche  $X \in \mathcal{M}_\varphi$ );
- (3) Se  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M}_\varphi$ , allora  $\bigcap_{j=1}^n E_j \in \mathcal{M}_\varphi$  (quindi anche  $\bigcup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ );
- (4) Se  $\{E_j\}$  è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a-due-a-due disgiunti, allora  $S := \bigcup_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ . Inoltre si ha

$$\varphi(A) \geq \sum_j \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap S^c)$$

per ogni  $A \in 2^X$ ;

- (5) (Additività numerabile) Se  $\{E_j\}$  è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a-due-a-due disgiunti, si ha  $\varphi(\bigcup_j E_j) = \sum_j \varphi(E_j)$ .

OSSERVAZIONE 1.3. Sia data una misura esterna  $\varphi$  su  $X$  e sia  $\{E_j\}$  una famiglia numerabile di insiemi misurabili. Poniamo  $E_1^* := E_1$  e

$$E_n^* := E_n - \bigcup_{j=1}^{n-1} E_j = E_n - \bigcup_{j=1}^{n-1} E_j^* \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Allora  $\{E_j^*\}$  è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a-due-a-due disgiunti e si ha

$$\bigcup_{j=1}^n E_j^* = \bigcup_{j=1}^n E_j \quad (\text{per ogni } n), \quad \bigcup_j E_j^* = \bigcup_j E_j.$$

In particolare, ricordando il punto (4) di Teorema 1.1, si ha  $\bigcup_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ .

DEFINIZIONE 1.3. Una famiglia non vuota  $\Sigma \subset 2^X$  è detta “ $\sigma$ -algebra (in  $X$ )” se gode delle seguenti proprietà:

- (i) Se  $E \in \Sigma$ , allora  $E^c \in \Sigma$ ;
- (ii) Se  $\{E_j\}$  è una famiglia numerabile di insiemi di  $\Sigma$ , si ha  $\bigcup_j E_j \in \Sigma$ .

OSSERVAZIONE 1.4. In Definizione 1.3 l’assioma (ii) può venir sostituito da

- (ii)\* Se  $\{E_j\}$  è una famiglia numerabile di insiemi di  $\Sigma$ , si ha  $\bigcap_j E_j \in \Sigma$ .

ESEMPIO 1.5. Sia  $X$  un qualsiasi insieme. Allora  $2^X$  e  $\{\emptyset, X\}$  sono entrambe  $\sigma$ -algebre.

ESEMPIO 1.6.  $\Sigma := \{E \in 2^{[0,1]} \mid \#(E) \leq \aleph_0 \text{ oppure } \#(E^c) \leq \aleph_0\}$  è una  $\sigma$ -algebra.

ESEMPIO 1.7. La famiglia  $\Sigma := \{E \in 2^{\mathbb{N}} \mid \#(E) < \infty \text{ oppure } \#(E^c) < \infty\}$  è  $c$ -chiusa ma non è chiusa rispetto all’unione numerabile. Quindi  $\Sigma$  non è una  $\sigma$ -algebra.

Per Teorema 1.1 e Osservazione 1.3, vale quindi il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 1.1 (°). Se  $\varphi$  è una misura esterna su  $X$ , allora  $\mathcal{M}_\varphi$  è una  $\sigma$ -algebra.

TEOREMA 1.2 (\*\*). Se  $\varphi$  è una misura esterna su  $X$ , valgono le seguenti proprietà:

- (1) (Continuità dal basso) Se  $\{E_j\}$  è una famiglia numerabile e crescente di insiemi misurabili, si ha  $\varphi(\cup_j E_j) = \lim_j \varphi(E_j)$ .
- (2) (Continuità dall'alto) Sia  $\{E_j\}$  è una famiglia numerabile e decrescente di insiemi misurabili, con  $\varphi(E_1) < \infty$ . Allora  $\varphi(\cap_j E_j) = \lim_j \varphi(E_j)$ .

OSSERVAZIONE 1.5. Se in (2) di Teorema 1.2 non si assume l'ipotesi  $\varphi(E_1) < \infty$ , la tesi può fallire. Per esempio, se  $X := \mathbb{N}$  con  $\varphi(E) := \#(E)$ , possiamo considerare la famiglia degli  $E_j := \{j, j+1, \dots\} \in \mathcal{M}_\varphi = 2^X$ . In tal caso si ha  $\cap_j E_j = \emptyset$  e quindi  $\varphi(\cap_j E_j) = 0$ , mentre  $\varphi(E_j) = \infty$  per ogni  $j$ .

## 2. Misure esterne metriche, Boreliane, Borel-regolari, di Radón

DEFINIZIONE 1.4. Una misura esterna su uno spazio metrico  $(X, d)$  è detta “di Carathéodory” (oppure “metrica”) se

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

per ogni coppia di insiemi  $A, B \in 2^X$  tale che

$$\text{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\} > 0.$$

TEOREMA 1.3 (\*\*\*). Sia  $\varphi$  una misura esterna di Carathéodory su uno spazio metrico  $(X, d)$ . Allora ogni sottoinsieme chiuso di  $X$  è misurabile.

[\* III settimana (30/09/2019); 12 \*]

OSSERVAZIONE 1.6. Si può provare che vale anche il “viceversa” di Teorema 1.3: Se  $\varphi$  è una misura esterna su uno spazio metrico  $(X, d)$  e se ogni sottoinsieme chiuso di  $X$  è misurabile, allora  $\varphi$  è di Carathéodory ([12, Theorem 1.7]).

PROPOSIZIONE 1.2 (\*). Sia dato  $\mathcal{I} \subset 2^X$  e indichiamo con  $\mathcal{A}_\mathcal{I}$  la famiglia delle  $\sigma$ -algebre in  $X$  contenute in  $\mathcal{I}$ . Allora

$$\Sigma(\mathcal{I}) := \cap_{\Sigma \in \mathcal{A}_\mathcal{I}} \Sigma$$

è una  $\sigma$ -algebra in  $X$ , detta “la  $\sigma$ -algebra generata da  $\mathcal{I}$ ”. Se  $\mathcal{I}$  è una  $\sigma$ -algebra allora  $\Sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$ .

PROPOSIZIONE 1.3 (\*\*). Sia  $X$  uno spazio topologico e indichiamo con  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$ , rispettivamente, la famiglia degli insiemi compatti, la famiglia degli insiemi chiusi e la famiglia degli insiemi aperti di  $X$ . Allora:

- (1) Si ha  $\Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$ ;
- (2) Se  $X$  è uno spazio di Hausdorff, vale l'inclusione  $\Sigma(\mathcal{K}) \subset \Sigma(\mathcal{F})$ ;

- (3) Se  $(X, d)$  è uno spazio metrico separabile, si ha  $\Sigma(\mathcal{K}) = \Sigma(\mathcal{G})$  (dimostrato nel caso particolare dello spazio Euclideo; per una trattazione del caso generale si può vedere [14]).

OSSERVAZIONE 1.7. In uno spazio topologico che non sia metrico e separabile può effettivamente accadere che  $\Sigma(\mathcal{K}) \neq \Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$ . Si consideri per esempio  $[0, 1]$  con la topologia discreta e cioè  $\mathcal{G} := 2^{[0,1]}$ . Osserviamo che  $\mathcal{K}$  coincide con la famiglia dei sottoinsiemi finiti di  $[0, 1]$ . Se consideriamo la  $\sigma$ -algebra

$$\Sigma_0 := \{E \in 2^{[0,1]} \mid \#(E) \leq \aleph_0 \text{ oppure } \#(E^c) \leq \aleph_0\}$$

introdotta in Esempio 1.6, si ha  $\Sigma(\mathcal{K}) \subset \Sigma_0 \subset 2^{[0,1]}$ . Inoltre, evidentemente, vale  $\Sigma_0 \neq 2^{[0,1]} = \mathcal{G} = \Sigma(\mathcal{G})$ .

DEFINIZIONE 1.5. Siano  $X$  uno spazio topologico,  $\varphi$  una misura esterna su  $X$  e  $\mathcal{M}_\varphi$  la  $\sigma$ -algebra degli insiemi misurabili rispetto a  $\varphi$ . Allora:

- (i) La  $\sigma$ -algebra  $\Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$  viene indicata con  $\mathcal{B}(X)$  e i suoi elementi sono detti “insiemi Boreliani”;
- (ii)  $\varphi$  è detta “Boreliana” (oppure “di Borel”) se  $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\varphi$ ;
- (iii)  $\varphi$  è detta “Borel regolare” se è Boreliana e se inoltre per ogni insieme  $A \in 2^X$  esiste  $B \in \mathcal{B}(X)$  tale che  $B \supset A$  e  $\varphi(B) = \varphi(A)$ ;
- (iv)  $\varphi$  è detta “di Radón” se è Borel regolare e se  $\varphi(K) < \infty$  per ogni insieme compatto  $K$  in  $X$ .

Da Teorema 1.3 segue subito il seguente risultato.

COROLLARIO 1.1 ( $^\circ$ ). Ogni misura esterna di Carathéodory su uno spazio metrico è Boreliana.

Valgono i seguenti due interessanti risultati di approssimazione, che qui enunciamo senza dimostrazione. Per una dimostrazione del primo rimandiamo a [5, Theorem 4.17]). Il secondo è un corollario piuttosto facile del primo, cfr. [5, Corollary 4.18]).

TEOREMA 1.4. Sia  $\varphi$  una misura esterna Boreliana su uno spazio metrico  $(X, d)$  e sia  $B \in \mathcal{B}(X)$ . Si verificano i seguenti fatti:

- (1) Se  $\varphi(B) < \infty$ , allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un insieme chiuso  $F$  tale che  $F \subset B$  e  $\varphi(B - F) \leq \varepsilon$ ;
- (2) Se  $B \subset \cup_{j=1}^{\infty} V_j$ , dove i  $V_j$  sono insiemi aperti tali che  $\varphi(V_j) < \infty$ , allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un insieme aperto  $G \supset B$  tale che  $\varphi(G - B) \leq \varepsilon$ .

TEOREMA 1.5. Sia  $\varphi$  una misura esterna Borel regolare su uno spazio metrico  $(X, d)$  e sia  $E \in \mathcal{M}_\varphi$ . Si verificano i seguenti fatti:

- (1) Se  $\varphi(E) < \infty$ , allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un insieme chiuso  $F$  tale che  $F \subset E$  e  $\varphi(E - F) \leq \varepsilon$ ;



- (2) Se  $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ , dove i  $V_j$  sono insiemi aperti tali che  $\varphi(V_j) < \infty$ , allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un insieme aperto  $G \supset E$  tale che  $\varphi(G - E) \leq \varepsilon$ .

**TEOREMA 1.6 (\*\*).** Si consideri la funzione  $\mathcal{L}^n : 2^{\mathbb{R}^n} \rightarrow [0, +\infty]$  definita da

$$\mathcal{L}^n(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } E = \emptyset \\ \inf \left\{ \sum_j v(I_j) \mid \{I_j\} \in \mathcal{R}(E) \right\} & \text{se } E \neq \emptyset. \end{cases}$$

dove  $\mathcal{R}(E)$  indica la famiglia dei ricoprimenti numerabili di  $E$  costituiti di intervalli aperti in  $\mathbb{R}^n$ , mentre  $v(I_j)$  denota la misura elementare dell'intervallo  $I_j$ . Allora  $\mathcal{L}^n$  è una misura esterna metrica ed è di Radón.

[\* IV settimana (07/10/2019); 16 \*]

**DEFINIZIONE 1.6.** La misura esterna  $\mathcal{L}^n$  definita in Teorema 1.6 è detta “misura esterna di Lebesgue  $n$ -dimensionale”.

Il seguente risultato elenca alcune proprietà della misura esterna di Lebesgue.

**TEOREMA 1.7 (\*\*).** Valgono i seguenti fatti:

- (1) Per ogni  $a \in \mathbb{R}^n$  si ha  $\mathcal{L}^n(\{a\}) = 0$ ;
- (2) Se  $I$  è un intervallo aperto in  $\mathbb{R}^n$ , si ha  $\mathcal{L}^n(I) = v(I)$ ;
- (3) Per ogni  $E \subset \mathbb{R}^n$  non vuoto e per ogni  $\tau \in \mathbb{R}^n$  si ha:
  - $\mathcal{L}^n(E + \tau) = \mathcal{L}^n(E)$ ;
  - Se  $E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$  allora  $E + \tau \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$ ;
- (4) Per ogni  $E \subset \mathbb{R}^n$  non vuoto e per ogni  $\rho \in \mathbb{R}^+$  si ha:
  - $\mathcal{L}^n(\rho E) = \rho^n \mathcal{L}^n(E)$ ;
  - Se  $E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$  allora  $\rho E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$ ;

**Esercizio 1.1.** Provare le seguenti identità:

$$\begin{aligned} (E + \tau)^c &= E^c + \tau, & (A + \tau) \cap (B + \tau) &= (A \cap B) + \tau \\ (\rho E)^c &= \rho E^c, & (\rho A) \cap (\rho B) &= \rho(A \cap B). \end{aligned}$$

**ESEMPIO 1.8.** Si ha  $\mathcal{L}^n(\mathbb{Q}^n) = 0$ . L'insieme  $\mathbb{Q}^n$  è misurabile.

**ESEMPIO 1.9** (Esistenza di insiemi non misurabili; l'esempio di Vitali). Consideriamo la seguente relazione di equivalenza in  $[0, 1]$ :  $x \sim y$  se  $x - y \in \mathbb{Q}$ . Grazie all'assioma della scelta possiamo poi “costruire” un insieme  $E$  di rappresentanti delle classi di equivalenza. Se  $\mathbb{Q} \cap (0, 1] = \{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , poniamo infine

$$E_i := E'_i \cup E''_i$$

con

$$E'_i := (E \cap [0, q_i]) + 1 - q_i, \quad E''_i := (E \cap (q_i, 1]) - q_i.$$

Valgono le seguenti proprietà:

- (1) Gli insiemi  $E_i$  sono a-due-a-due disgiunti, i.e.,  $E_i \cap E_j = \emptyset$  se  $i \neq j$ ;  
 (2) Si ha

$$(0, 1) \subset \bigcup_i E_i \subset [0, 1]$$

e quindi

$$\mathcal{L}^1\left(\bigcup_i E_i\right) = 1.$$

Ora possiamo provare che  $E$  non è misurabile. Se (per assurdo) lo fosse, lo sarebbero anche tutti gli  $E_i$  e si avrebbe  $\mathcal{L}^1(E_i) = \mathcal{L}^1(E)$ . Si giungerebbe così all'assurdo:

$$1 = \mathcal{L}^1\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i \mathcal{L}^1(E_i) = \sum_i \mathcal{L}^1(E).$$

**Esercizio 1.2.** Provare che se  $i \neq j$  allora  $E_i'' \cap E_j'' = \emptyset$ .

OSSERVAZIONE 1.8. Senza l'assioma della scelta è impossibile provare l'esistenza di insiemi non misurabili (Solovay, 1970).

OSSERVAZIONE 1.9. Utilizzando l'insieme di Cantor si può provare che esistono sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  che sono misurabili rispetto a  $\mathcal{L}^1$  ma non sono Boreliani. Indicato con  $C$  l'insieme di Cantor e ricordando che  $\mathcal{L}^1(C) = 0$ , si ha infatti  $2^C \subset \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}$  (per (2) di Teorema 1.1) e quindi anche

$$\text{card}(\mathbb{R}) = \text{card}(C) < \text{card}(2^C) \leq \text{card}(\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}).$$

A questo punto la conclusione segue subito dal fatto che  $\text{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \text{card}(\mathbb{R})$ , per la dimostrazione del quale rimandiamo a [16].

[\* V settimana (14/10/2019); 20 \*]

TEOREMA 1.8 (\*). Dati  $E \subset \mathbb{R}^n$  e  $\delta > 0$ , indichiamo con  $\mathcal{R}_\delta(E)$  la famiglia dei ricoprimenti numerabili  $\{C_j\}$  di  $E$  tali che  $0 < \text{diam}(C_j) \leq \delta$  per ogni  $j$ . Per  $s \in [0, +\infty)$ , poniamo anche

$$\alpha(s) := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)}, \quad \Gamma(t) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx.$$

Allora la funzione  $\mathcal{H}_\delta^s : 2^{\mathbb{R}^n} \rightarrow [0, \infty]$  definita da

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } E = \emptyset \\ \inf \left\{ \sum_j \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s \mid \{C_j\} \in \mathcal{R}_\delta(E) \right\} & \text{se } E \neq \emptyset. \end{cases}$$

è una misura esterna.

OSSERVAZIONE 1.10. Si può provare che  $\alpha(n) = \mathcal{L}^n(B_1)$ , dove  $B_1$  è la palla unitaria di  $\mathbb{R}^n$ . Per una dimostrazione di questo fatto, si veda per esempio [17, Ch. 2, Exercise 14].

**Esercizio 1.3.** Verificare col calcolo diretto che:

$$\alpha(0) = 1, \quad \alpha(1) = 2, \quad \alpha(2) = \pi, \quad \alpha(3) = \frac{4\pi}{3}.$$

**TEOREMA 1.9 (\*\*).** Sia  $s \in [0, +\infty)$  e  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Allora la funzione  $\delta \mapsto \mathcal{H}_\delta^s(E)$  è monotona decrescente, quindi esiste

$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

La mappa  $\mathcal{H}^s : 2^{\mathbb{R}^n} \rightarrow [0, +\infty]$  è una misura esterna metrica e Borel regolare. Essa è detta “misura esterna di Hausdorff  $s$ -dimensionale (in  $\mathbb{R}^n$ )”.

**Esercizio 1.4.** Provare che se  $X$  è uno spazio metrico, allora per ogni sottoinsieme  $C$  di  $X$  si ha  $\text{diam } C = \text{diam } \overline{C}$ .

Alcune ulteriori proprietà della misura esterna di Hausdorff sono raccolte in questo teorema di cui non proviamo il punto (2) e lasciamo per esercizio le parti dei punti (3) e (4) che replicano quasi identicamente gli argomenti usati per provare le corrispondenti asserzioni in Teorema 1.7. La dimostrazione del punto (2) è un argomento (basato sulla disuguaglianza isodiametrica) che non abbiamo tempo di affrontare. Gli interessati possono consultare, per esempio, [3, 11].

**TEOREMA 1.10 (\*).** Si ha:

- (1)  $\mathcal{H}^0 = \#$  (misura del conteggio);
- (2)  $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$  (in  $\mathbb{R}^n$ );
- (3) Per ogni insieme non vuoto  $E \subset \mathbb{R}^n$  e per ogni  $\tau \in \mathbb{R}^n$  si ha:
  - $\mathcal{H}^s(E + \tau) = \mathcal{H}^s(E)$ ;
  - Se  $E \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}$  allora  $E + \tau \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}$ ;
- (4) Per ogni insieme non vuoto  $E \subset \mathbb{R}^n$  e per ogni  $\rho \in \mathbb{R}^+$  si ha:
  - $\mathcal{H}^s(\rho E) = \rho^s \mathcal{H}^s(E)$ ;
  - Se  $E \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}$  allora  $\rho E \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}$ ;

**Esercizio 1.5.** Relativamente a Teorema 1.10, provare il secondo punto di (3) ed il secondo punto di (4).

[\* VI settimana (21/10/2019); 24 \*]

Attraverso le proprietà della misura di Hausdorff si può definire una nozione di dimensione per i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ .

**PROPOSIZIONE 1.4 (\*).** Se  $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$ , con  $E \subset \mathbb{R}^n$  e  $s \geq 0$ , allora  $\mathcal{H}^t(E) = 0$  per ogni  $t > s$ . Inoltre, per ogni  $t > n$  si ha  $\mathcal{H}^t(\mathbb{R}^n) = 0$ . Conseguentemente, per ogni  $E \subset \mathbb{R}^n$ , l'insieme

$$R(E) := \{t \in [0, +\infty) \mid \mathcal{H}^t(E) = 0\}$$

è una semiretta destra che include  $(n, +\infty)$ . La “dimensione di Hausdorff” dell'insieme  $E \subset \mathbb{R}^n$  è definita come il numero

$$\text{dim}_H(E) := \inf R(E) \leq n.$$

COROLLARIO 1.2 (\*). *La misura esterna di Hausdorff  $\mathcal{H}^s$  in  $\mathbb{R}^n$  non è di Radón, eccetto che per  $s \geq n$ .*

ESEMPIO 1.10. Sia  $C$  l'insieme di Cantor. Se esiste  $s$  tale che  $\mathcal{H}^s(C) \in (0, +\infty)$  allora  $s = \ln 2 / \ln 3$ . Questo ci consente di "scommettere" che  $C$  abbia dimensione di Hausdorff pari a  $\ln 2 / \ln 3$ . Per una dimostrazione completa di tale fatto vedasi, per esempio, [4, Theorem 1.14] oppure [17, Ch. 7, Theorem 2.1].

DEFINIZIONE 1.7. *Sia  $X$  un insieme e  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -algebra in  $X$ . Allora, una "misura su  $\mathcal{A}$ " è una funzione  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  tale che:*

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- (ii) se  $\{E_j\}$  è una famiglia numerabile di insiemi in  $\mathcal{A}$  a-due-a-due disgiunti, allora  $\mu(\cup_j E_j) = \sum_j \mu(E_j)$ .

*La terna  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  è detta "spazio con misura".*

Come conseguenza di Teorema 1.1 e Proposizione 1.1, otteniamo subito il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 1.5 (°). *Se  $\varphi$  è una misura esterna sull'insieme  $X$ , allora  $(X, \mathcal{M}_\varphi, \varphi|_{\mathcal{M}_\varphi})$  è uno spazio con misura.*

ESEMPIO 1.11. La "misura di Lebesgue"  $\mathcal{L}^n|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}}$  e la "misura di Hausdorff"  $\mathcal{H}^s|_{\mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}}$ . Per semplicità esse sono indicate con  $\mathcal{L}^n$  and  $\mathcal{H}^s$ , rispettivamente.

OSSERVAZIONE 1.11. Ci si può chiedere se una misura provenga sempre da una misura esterna nel modo indicato in Proposizione 1.5. Una risposta quasi affermativa è data dal seguente risultato (vedasi [5, Theorem 4.47]): Se  $(X, \mathcal{A}, \mu)$   $\mu$  è uno spazio con misura, allora esiste una misura esterna  $\varphi$  su  $X$  tale che  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_\varphi$  e  $\varphi|_{\mathcal{A}} = \mu$ .

## CHAPTER 2

### Funzioni misurabili e integrale.

#### 1. Funzioni misurabili.

**DEFINIZIONE 2.1.** Siano  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e  $(Y, \tau)$ , rispettivamente, uno spazio con misura e uno spazio topologico. Allora una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice “misurabile” se per ogni  $G \in \tau$  si ha  $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ .

**OSSERVAZIONE 2.1.** Consideriamo uno spazio misurabile  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e supponiamo che  $X$  sia anche uno spazio topologico con la topologia inclusa in  $\mathcal{A}$ . Inoltre, siano  $Y$  uno spazio topologico e  $f : X \rightarrow Y$  una funzione continua. Allora  $f$  è misurabile. Esempi di situazioni di questo tipo sono:

- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}, \mathcal{L}^n |_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}}), f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  continua;
- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}, \mathcal{H}^s |_{\mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}}), f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  continua.

**PROPOSIZIONE 2.1** ( $^\circ$ ). Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura e siano  $Y, Z$  spazi topologici. Supponiamo inoltre che  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  siano, rispettivamente, una funzione misurabile e una funzione continua. Allora  $g \circ f : X \rightarrow Z$  è una funzione misurabile.

**Esercizio 2.1.** Siano dati due insiemi qualsiasi  $X, Y$  e una funzione qualsiasi  $f : X \rightarrow Y$ . Provare che:

- Per ogni  $\{E_j\} \subset 2^Y$  si ha  $f^{-1}(\cap_j E_j) = \cap_j f^{-1}(E_j)$  e  $f^{-1}(\cup_j E_j) = \cup_j f^{-1}(E_j)$ ;
- Per ogni  $E \in 2^Y$  si ha  $f^{-1}(E^c) = [f^{-1}(E)]^c$ .

**PROPOSIZIONE 2.2** (\*\*). Siano dati uno spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e una funzione  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Allora le seguenti affermazioni sono fra di loro equivalenti:

- (1)  $f$  è misurabile;
- (2)  $f^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{A}$  per ogni  $a \in \mathbb{R}$ ;
- (3)  $f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{A}$  per ogni  $a \in \mathbb{R}$ ;
- (4)  $f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{A}$  per ogni  $a \in \mathbb{R}$ ;
- (5)  $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$  per ogni  $a \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 2.2.** Con riferimento a Proposizione 2.2 provare (4)  $\Rightarrow$  (5) e (5)  $\Rightarrow$  (2).

**Esercizio 2.3.** Provare che se  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  è uno spazio con misura e  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  è una funzione misurabile, allora le funzioni  $-f$  e  $f/2$  sono misurabili.

TEOREMA 2.1 (\*\*). Se  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  è uno spazio con misura, valgono le seguenti proprietà:

- (1) Siano  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  misurabili. Allora  $f + g$  (escludendo che si verifichi  $\infty - \infty$ ),  $|f|$ ,  $fg$ ,  $\max\{f, g\}$  e  $\min\{f, g\}$  sono misurabili. Se  $g(x) \neq 0$  per ogni  $x \in X$ , la funzione  $f/g$  è misurabile.
- (2) Sia data una successione di funzioni misurabili  $f_k : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Allora le funzioni  $\inf_k f_k$ ,  $\sup_k f_k$ ,  $\liminf_k f_k$  e  $\limsup_k f_k$  sono misurabili. In particolare, se esiste  $\lim_k f_k$  allora questo è misurabile.

[\* VII settimana (28/10/2019); 28 \*]

OSSERVAZIONE 2.2. Può capitare che il valore assoluto di una funzione non misurabile sia misurabile. Per esempio, consideriamo lo spazio con misura  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}, \mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}})$  e sia  $E$  l'insieme non misurabile di Vitali (si veda Esempio 1.9). Allora la funzione  $f := \chi_E - \chi_{E^c}$  non è misurabile, mentre  $|f| = 1$  è misurabile.

## 2. Integrale: definizione e prime proprietà

DEFINIZIONE 2.2. Sia  $X$  un insieme. Una funzione  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  si dice “numerabilmente semplice” se  $\text{Im}(f)$  è numerabile.

OSSERVAZIONE 2.3. Se  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  è una funzione numerabilmente semplice allora si ha

$$f = \sum_i a_i \chi_{A_i} \quad (\text{rappresentazione canonica di } f)$$

dove  $\{a_i\} = \text{Im}(f)$  e  $A_i := f^{-1}(\{a_i\})$ . Nel caso particolare che  $X$  sia il dominio di uno spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e che  $f$  sia misurabile si ha inoltre che  $A_i \in \mathcal{A}$ , per ogni  $i$ . Infatti, osservando che  $\{a_i\}^c = [-\infty, a_i) \cup (a_i, +\infty]$  è un sottoinsieme aperto di  $\overline{\mathbb{R}}$ , si ha:

$$A_i = f^{-1}(\{a_i\}) = f^{-1}([\{a_i\}^c]^c) = [f^{-1}(\{a_i\}^c)]^c \in \mathcal{A}.$$

DEFINIZIONE 2.3. Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura e indichiamo con  $\Sigma$  la famiglia delle funzioni numerabilmente semplici e misurabili  $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Allora:

- (i) Se  $\varphi \in \Sigma$  e  $\varphi \geq 0$ , poniamo

$$I_\mu(\varphi) := \sum_i a_i \mu(A_i); \quad \{a_i\} = \text{Im}(\varphi), \quad A_i := \varphi^{-1}(\{a_i\})$$

dove si assume per convenzione che  $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ ;

- (ii) Sia  $\Sigma^*$  la famiglia delle funzioni  $\varphi \in \Sigma$  tali che almeno uno di  $I_\mu(\varphi \vee 0)$  e  $I_\mu((-\varphi) \vee 0)$  sia finito. Se  $\varphi \in \Sigma^*$  allora poniamo

$$I_\mu(\varphi) := I_\mu(\varphi \vee 0) - I_\mu((-\varphi) \vee 0).$$

OSSERVAZIONE 2.4. Nelle ipotesi e con la notazione di Definizione 2.3, sia  $\varphi \in \Sigma^*$  e definiamo

$$J_+ := \{i \mid a_i \geq 0\}, \quad J_- := \{i \mid a_i < 0\}.$$

Allora

$$\varphi \vee 0 = \sum_{i \in J_+} a_i \chi_{A_i}, \quad -[(-\varphi) \vee 0] = \varphi \wedge 0 = \sum_{i \in J_-} a_i \chi_{A_i}$$

da cui

$$I_\mu(\varphi \vee 0) = \sum_{i \in J_+} a_i \mu(A_i) = \sum_{i \in J_+} |a_i| \mu(A_i)$$

e

$$I_\mu((- \varphi) \vee 0) = \sum_{i \in J_-} (-a_i) \mu(A_i) = \sum_{i \in J_-} |a_i| \mu(A_i).$$

Ne segue che

$$I_\mu(\varphi) = I_\mu(\varphi \vee 0) - I_\mu((- \varphi) \vee 0) = \sum_i a_i \mu(A_i).$$

Com'è naturale attendersi, si ha anche

$$(2.1) \quad I_\mu(|\varphi|) = \sum_i |a_i| \mu(A_i) = I_\mu(\varphi \vee 0) + I_\mu((- \varphi) \vee 0).$$

Per dimostrarlo, osserviamo prima di tutto che se  $i \in J_+$  allora potrebbe capitare che esista  $j \in J_-$  tale che  $-a_j = a_i$ . In tal caso poniamo  $f(i) := j$  e indichiamo con  $L$  l'insieme degli  $i$  per cui questo accade. Rimane così definita una funzione

$$f : L \subset J_+ \rightarrow f(L) \subset J_-$$

with the following property

$$-a_{f(i)} = a_i \quad (\text{per ogni } i \in L).$$

Se  $L \neq \emptyset$  allora la rappresentazione canonica di  $|\varphi|$  non sarà

$$\sum_i |a_i| \chi_{A_i} = \sum_{i \in J_+} a_i \chi_{A_i} + \sum_{i \in J_-} (-a_i) \chi_{A_i}$$

ma

$$\sum_{i \in J_+ \setminus L} a_i \chi_{A_i} + \sum_{i \in L} a_i \chi_{A_i \cup A_{f(i)}} + \sum_{j \in J_- \setminus f(L)} (-a_j) \chi_{A_j}.$$

Da questa (dopo aver osservato che  $|\varphi| \in \Sigma^*$ ) si ricava facilmente che vale (2.1). La precedente discussione prova, in particolare, l'equivalenza delle seguenti proprietà:

- $I_\mu(\varphi) \in \mathbb{R}$ ;
- $I_\mu(\varphi \vee 0), I_\mu((- \varphi) \vee 0) < +\infty$ ;
- $I_\mu(|\varphi|) = \sum_i |a_i| \mu(A_i) < +\infty$ .

PROPOSIZIONE 2.3 (\*). Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura. Allora

$$I_\mu(\varphi) \leq I_\mu(\psi)$$

per ogni  $\varphi, \psi \in \Sigma^*$  tali che  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  per  $\mu$ -q.o.  $x \in X$ . Di conseguenza, se consideriamo una funzione  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  e poniamo

$$\Sigma_-(f) := \{\varphi \in \Sigma^* \mid \varphi \leq f \text{ } \mu\text{-q.o.}\}, \quad \Sigma_+(f) := \{\varphi \in \Sigma^* \mid \varphi \geq f \text{ } \mu\text{-q.o.}\}$$

allora tali insiemi sono entrambi non vuoti e vale la disuguaglianza

$$\sup\{I_\mu(\varphi) \mid \varphi \in \Sigma_-(f)\} \leq \inf\{I_\mu(\varphi) \mid \varphi \in \Sigma_+(f)\}.$$

[\* VIII settimana (04/11/2019); 32 \*]

OSSERVAZIONE 2.5. Se  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  è uno spazio con misura e  $\varphi, \psi \in \Sigma^*$  sono tali che  $\varphi(x) = \psi(x)$  per  $\mu$ -q.o.  $x \in X$ , allora da Proposizione 2.3 segue subito che  $I_\mu(\varphi) = I_\mu(\psi)$ .

DEFINIZIONE 2.4. Siano dati uno spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e una funzione  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Allora:

(i) L'“integrale superiore di  $f$ ” è dato da

$$\int^* f d\mu := \inf\{I_\mu(\varphi) \mid \varphi \in \Sigma_+(f)\}$$

mentre l'“integrale inferiore di  $f$ ” è

$$\int_* f d\mu := \sup\{I_\mu(\varphi) \mid \varphi \in \Sigma_-(f)\}.$$

(N.B. Si ha  $\int_* f d\mu \leq \int^* f d\mu$ , per Proposizione 2.3)

(ii) Si dice che “ $f$  è integrabile” se  $f$  è misurabile e gli integrali inferiore e superiore di  $f$  sono uguali. In tal caso si definisce l'“integrale di  $f$ ” come segue

$$\int f d\mu := \int^* f d\mu = \int_* f d\mu.$$

(iii) Si dice che “ $f$  è sommabile” se  $f$  è integrabile e  $\int f d\mu$  è finito.

OSSERVAZIONE 2.6. Siano dati uno spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e due funzioni misurabili  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tali che  $f = g$   $\mu$ -q.o. Allora si ha

$$\Sigma_-(f) = \Sigma_-(g), \quad \Sigma_+(f) = \Sigma_+(g)$$

e quindi

$$\int_* f d\mu = \int_* g d\mu, \quad \int^* f d\mu = \int^* g d\mu.$$

In particolare,  $f$  è integrabile se e solo se  $g$  è integrabile. In tal caso si ha

$$\int f d\mu = \int g d\mu.$$

**Esercizio 2.4.** Provare che se  $\varphi \in \Sigma^*$  e  $I_\mu(\varphi) \in \mathbb{R}$ , allora esiste  $\overline{\varphi} \in \Sigma^*$  tale che  $\text{Im}(\overline{\varphi}) \subset \mathbb{R}$  e  $\overline{\varphi} = \varphi$  per  $\mu$ -q.o.  $x \in X$  (e quindi  $I_\mu(\overline{\varphi}) = I_\mu(\varphi)$ , per Osservazione 2.5).

**Esercizio 2.5.** Provare che se  $E, F$  sono sottoinsiemi di  $X$ , allora  $\chi_E \chi_F = \chi_{E \cap F}$ .

**Esercizio 2.6.** Data una funzione  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , sia

$$P := f^{-1}([0, +\infty]), \quad N := P^c = f^{-1}([-\infty, 0)).$$

Dimostrare che

$$|f| = f\chi_P - f\chi_N, \quad f = |f|\chi_P - |f|\chi_N.$$



Il seguente risultato elenca le prime proprietà dell'integrale, ben note nella trattazione elementare.

**TEOREMA 2.2 (\*\*\*)**. *Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura. Valgono le seguenti proprietà:*

- (1) *Se  $\varphi \in \Sigma^*$  allora  $\varphi$  è integrabile e si ha  $\int \varphi d\mu = I_\mu(\varphi)$ . In particolare, se  $I_\mu(\varphi)$  è finito allora  $\varphi$  è sommabile;*
- (2) *Una funzione sommabile è finita  $\mu$ -q.o.;*
- (3) *Se  $f, g$  sono funzioni sommabili e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora  $\alpha f + \beta g$  (purché sia ben definita) è sommabile e si ha*

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu;$$

- (4) *Se  $f, g$  sono due funzioni integrabili tali che  $f \leq g$   $\mu$ -q.o., allora*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu;$$

- (5) *Se  $f$  è una funzione sommabile e  $A \in \mathcal{A}$ , allora  $f\chi_A$  è una funzione sommabile;*
- (6) *Una funzione misurabile  $f$  è sommabile se e soltanto se  $|f|$  è una funzione sommabile;*
- (7) *Se  $f$  è una funzione sommabile, allora*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

[\* IX settimana (11/11/2019); 36 \*]

**OSSERVAZIONE 2.7.** Una funzione non misurabile (e quindi non integrabile) può avere valore assoluto sommabile. Per esempio: se lo spazio con misura è  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}, \mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}})$  e se  $E$  indica l'insieme non misurabile di Vitali (Esempio 1.9), allora la funzione  $f := \chi_E - \chi_{[0,1] \setminus E}$  non è misurabile mentre  $|f| = \chi_{[0,1]}$  è ovviamente sommabile. Questo fa capire come mai nel punto (6) di Teorema 2.2 si assume che  $f$  sia misurabile.

**DEFINIZIONE 2.5.** *Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura. Se  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  è una funzione misurabile e se  $A \in \mathcal{A}$ , allora:*

- (i) *Se  $f\chi_A$  è integrabile, si dice che “ $f$  è integrabile in  $A$ ” e si pone*

$$\int_A f d\mu := \int f\chi_A d\mu;$$

- (ii) *Si dice che “ $f$  è sommabile in  $A$ ” se  $f\chi_A$  è sommabile.*

**OSSERVAZIONE 2.8.** Nelle ipotesi di Definizione 2.5, si ha che  $f$  è integrabile (risp. sommabile) in  $X$  se e solo se  $f$  è integrabile (risp. sommabile). In tal caso si ha  $\int_X f d\mu = \int f d\mu$ . Inoltre, se  $A \in \mathcal{A}$  allora la funzione 1 è integrabile in  $A$  e vale  $\int_A 1 d\mu = \mu(A)$ .

Vale il seguente teorema che manifesta la maggior “versatilità” di questa teoria dell'integrazione rispetto a quella più elementare di Riemann.

**TEOREMA 2.3 (\*\*).** *Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura e consideriamo una funzione misurabile  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tale che  $f \geq 0$   $\mu$ -q.o. Allora  $f$  è integrabile.*

**Esercizio 2.7.** Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura. Provare che per ogni funzione integrabile  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  vale la disuguaglianza  $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$  (provata in Teorema 2.2 per  $f$  sommabile).

**COROLLARIO 2.1 (\*).** *Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura. Siano  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , rispettivamente, una funzione misurabile e una funzione sommabile soddisfacenti  $|f| \leq |g|$   $\mu$ -q.o. Allora  $f$  è sommabile.*

Vale anche questo facile (e intuitivo) risultato che ci sarà utile in seguito.

**PROPOSIZIONE 2.4 (\*).** *Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura e sia  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una funzione misurabile tale che  $f \geq 0$   $\mu$ -q.o. e  $\int_X f d\mu = 0$ . Allora  $f = 0$   $\mu$ -q.o.*

Quanto al confronto fra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann, vale il seguente risultato (solo enunciato, dimostrazione e.g. in [5, Theorem 6.16]).

**TEOREMA 2.4.** *Una funzione limitata  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile secondo Riemann se e solo se  $f$  è continua  $\mathcal{L}^1$ -q.o. in  $[a, b]$ . In tal caso l'integrale di Riemann di  $f$  coincide con  $\int_{[a,b]} \tilde{f} d\mathcal{L}^1$ , dove  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è l'estensione di  $f$  che vale zero in  $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ .*

[\* X settimana (18/11/2019); 40 \*]

Anticipazioni sul teorema di Fubini e sulla formula dell'area, finalizzate alle esercitazioni. Esempi ed esercizi su integrali.

[\* XI settimana (25/11/2019); 44 \*]

Esempi ed esercizi su integrali.

### 3. Teoremi di convergenza integrale

Vale il seguente importante risultato, per una dimostrazione del quale si suggerisce di consultare [3, Section 6.10].

**TEOREMA 2.5 (Lemma di Fatou).** *Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura e consideriamo una successione di funzioni misurabili  $f_k : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tali che  $f_k \geq 0$   $\mu$ -q.o. Allora*

$$\int \liminf_k f_k d\mu \leq \liminf_k \int f_k d\mu.$$

TEOREMA 2.6 (Convergenza monotona (\*)). Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura e consideriamo una successione di funzioni misurabili  $f_k : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tali che  $f_{k+1} \geq f_k \geq 0$   $\mu$ -q.o. Allora

$$\lim_k \int f_k d\mu = \int \lim_k f_k d\mu.$$

COROLLARIO 2.2 (°). Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura e consideriamo una successione di funzioni misurabili  $f_k : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tali che  $f_k \geq 0$   $\mu$ -q.o. Allora

$$\int \sum_k f_k d\mu = \sum_k \int f_k d\mu.$$

TEOREMA 2.7 (Convergenza dominata (\*\*)). Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura e si abbiano:

- (i) Una successione di funzioni misurabili  $f_k : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  che converge  $\mu$ -q.o. a  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ;
- (ii) Una funzione sommabile  $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tale che  $|f_k| \leq g$   $\mu$ -q.o., per ogni  $k$ .

Allora ogni  $f_k$  e  $f$  sono sommabili e vale

$$\lim_k \int |f_k - f| d\mu = 0.$$

In particolare

$$\lim_k \int f_k d\mu = \int f d\mu.$$

OSSERVAZIONE 2.9. Il seguente esempio mostra come, in generale:

- Nel Lemma di Fatou possa valere la disuguaglianza stretta;
- La conclusione del teorema di Lebesgue (convergenza dominata) possa essere falsa sotto la sola ipotesi di convergenza puntuale.

Consideriamo lo spazio con misura  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}, \mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}})$  e la successione di funzioni

$$f_k := k\chi_{(0,1/k)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Si vede subito che tale successione converge ovunque alla funzione  $f := 0$ , mentre si ha

$$\int f_k d(\mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}}) = \int_{(0,1/k)} k d(\mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}}) = 1$$

e anche

$$\int |f_k - f| d(\mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}}) = \int_{(0,1/k)} k d(\mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}}) = 1$$

per ogni  $k$ . Quindi

$$\int f d(\mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}}) = 0 < 1 = \lim_k \int f_k d(\mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}}).$$

e

$$\lim_k \int |f_k - f| d(\mathcal{L}^1|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}}) = 1 \neq 0.$$

[\* XII settimana (02/12/2019); 48 \*]

COROLLARIO 2.3 (\*). Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura e  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una funzione sommabile. Allora la funzione  $\nu_f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  definita come segue

$$(3.1) \quad \nu_f(A) := \int f \chi_A d\mu = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{A}$$

è una misura con segno, i.e.

- (1) Si ha  $\nu_f(\emptyset) = 0$ ;  
 (2) Se  $\{A_i\}$  è una famiglia numerabile di elementi a-due-a-due disgiunti di  $\mathcal{A}$ , allora

$$\nu_f(\cup_i A_i) = \sum_i \nu_f(A_i)$$

e tale serie converge assolutamente.

Inoltre  $\nu_f$  è assolutamente continua rispetto a  $\mu$ , ossia: se  $\mu(A) = 0$ , con  $A \in \mathcal{A}$ , allora  $\nu_f(A) = 0$ .

OSSERVAZIONE 2.10. Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura e sia  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  una misura con segno assolutamente continua rispetto a  $\mu$  (ossia: se  $\mu(A) = 0$ , con  $A \in \mathcal{A}$ , allora  $\nu(A) = 0$ ). Sorge spontaneamente la seguente questione: è vero che  $\nu$  si può rappresentare nella forma integrale (2.3)? Ebbene, a tale questione risponde affermativamente il teorema di Radon Nikodym. Esso afferma che esiste una funzione sommabile  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tale che  $\nu_f = \nu$ . Per una dimostrazione di tale importante risultato si può consultare, per esempio, [5, Section 6.6].

#### 4. Il teorema di Fubini

PROPOSIZIONE 2.5 (\*\*). Siano  $X, Y$  insiemi, siano

$$\mu : 2^X \rightarrow [0, +\infty], \quad \nu : 2^Y \rightarrow [0, +\infty]$$

due misure esterne e poniamo

$$\mathcal{R} := \mathcal{M}_\mu \times \mathcal{M}_\nu = \{A \times B \mid A \in \mathcal{M}_\mu, B \in \mathcal{M}_\nu\}.$$

Inoltre, se  $E \subset X \times Y$ , sia  $\mathcal{R}(E)$  la famiglia di tutti i ricoprimenti numerabili  $\{R_i\}_i$  di  $E$  con  $R_i \in \mathcal{R}$ . Allora la funzione

$$\mu \times \nu : 2^{X \times Y} \rightarrow [0, +\infty]$$

definita come segue ( $E \subset X \times Y$ )

$$(\mu \times \nu)(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } E = \emptyset \\ \inf \left\{ \sum_j \mu(A_j) \nu(B_j) \mid \{A_j \times B_j\} \in \mathcal{R}(E) \right\} & \text{se } E \neq \emptyset \end{cases}$$

è una misura esterna.

Per le misure di Lebesgue vale il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 2.6 (\*\*). Per ogni coppia di numeri interi positivi  $m, n$  si ha

$$\mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{m+n}.$$

[\* XIII settimana (09/12/2019); 52 \*]

DEFINIZIONE 2.6. Una misura esterna  $\varphi : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  è detta  $\sigma$ -finita se esiste una famiglia numerabile  $\{X_j\}$  di insiemi misurabili rispetto a  $\varphi$  tale che  $X = \cup_j X_j$  e  $\varphi(X_j) < +\infty$  per ogni  $j$ .

OSSERVAZIONE 2.11. In Definizione 2.6 non è restrittivo aggiungere l'ipotesi che gli insiemi  $X_j$  siano a-due-a-due disgiunti.

Vale il seguente profondo risultato, per la dimostrazione del quale rimandiamo a [5, Theorem 6.46].

TEOREMA 2.8. Siano date due misure esterne  $\sigma$ -finite

$$\mu : 2^X \rightarrow [0, +\infty], \quad \nu : 2^Y \rightarrow [0, +\infty].$$

Allora per ogni  $S \in \mathcal{M}_{\mu \times \nu}$  si ha:

- (1)  $S_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in S\} \in \mathcal{M}_\nu$ , per  $\mu$ -q.o.  $x \in X$ ;
- (2)  $x \mapsto \nu(S_x)$  è  $\mu$ -misurabile (quindi  $\mu$ -integrabile) e vale l'identità

$$\int \nu(S_x) d\mu = (\mu \times \nu)(S).$$

OSSERVAZIONE 2.12. Con riferimento a Teorema 2.8, potremmo chiederci se valga la proprietà più forte che

$$S_x \in \mathcal{M}_\nu \text{ per ogni } x \in X, \text{ tutte le volte che } S \in \mathcal{M}_{\mu \times \nu}.$$

Ebbene, in generale questo non è vero. Per provarlo, consideriamo l'insieme  $E \notin \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}$  costruito in Esempio 1.9 e definiamo

$$S := \{0\} \times E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Poiché  $(\mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^1)(S) = \mathcal{L}^2(S) = 0$ , si ha che  $S \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^1}$  (per (2) di Teorema 1.1). Tuttavia  $S_0 = E \notin \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}$ .

TEOREMA 2.9 (\*\*\*). Siano date due misure esterne  $\sigma$ -finite

$$\mu : 2^X \rightarrow [0, +\infty], \quad \nu : 2^Y \rightarrow [0, +\infty]$$

e una funzione  $\mu \times \nu$ -misurabile  $f(x, y) : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Supponiamo inoltre che  $f$  sia  $(\mu \times \nu)$ -sommabile in  $S \in \mathcal{M}_{\mu \times \nu}$ . Allora:

- (1)  $S_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in S\} \in \mathcal{M}_\nu$ , per  $\mu$ -q.o.  $x \in X$ ;

- (2)  $y \mapsto f(x, y)$  è  $\nu$ -sommabile in  $S_x$ , per  $\mu$ -q.o.  $x \in X$ ;
- (3)  $x \mapsto \int_{S_x} f(x, y) d\nu(y)$  è  $\mu$ -sommabile;
- (4) vale l'uguaglianza

$$\int_S f d(\mu \times \nu) = \int_X \left[ \int_{S_x} f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x).$$

Naturalmente, lo stesso argomento prova anche il seguente risultato speculare al precedente.

TEOREMA 2.10 ( $^\circ$ ). *Siano date due misure esterne  $\sigma$ -finite*

$$\mu : 2^X \rightarrow [0, +\infty], \quad \nu : 2^Y \rightarrow [0, +\infty]$$

*e una funzione  $\mu \times \nu$ -misurabile  $f(x, y) : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Supponiamo inoltre che  $f$  sia  $(\mu \times \nu)$ -sommabile in  $S \in \mathcal{M}_{\mu \times \nu}$ . Allora:*

- (1)  $S_y := \{x \in X \mid (x, y) \in S\} \in \mathcal{M}_\mu$ , per  $\nu$ -q.o.  $y \in Y$ ;
- (2)  $x \mapsto f(x, y)$  è  $\mu$ -sommabile in  $S_y$ , per  $\nu$ -q.o.  $y \in Y$ ;
- (3)  $y \mapsto \int_{S_y} f(x, y) d\mu(x)$  è  $\nu$ -sommabile;
- (4) vale l'uguaglianza

$$\int_S f d(\mu \times \nu) = \int_Y \left[ \int_{S_y} f(x, y) d\mu(x) \right] d\nu(y).$$

Applicando Teorema 2.9 alle misure di Lebesgue e ricordando Proposizione 2.6, otteniamo subito il seguente risultato.

COROLLARIO 2.4 ( $^\circ$ ). *Sia  $f(x, y) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una funzione  $\mathcal{L}^{m+n}$ -misurabile. Supponiamo inoltre che  $f$  sia  $\mathcal{L}^{m+n}$ -sommabile in  $S \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^{m+n}}$ . Allora:*

- (1)  $S_x := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in S\} \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$ , per  $\mathcal{L}^m$ -q.o.  $x \in \mathbb{R}^m$ ;
- (2)  $y \mapsto f(x, y)$  è  $\mathcal{L}^n$ -sommabile in  $S_x$ , per  $\mathcal{L}^m$ -q.o.  $x \in \mathbb{R}^m$ ;
- (3)  $x \mapsto \int_{S_x} f(x, y) d\mathcal{L}^n(y)$  è  $\mathcal{L}^m$ -sommabile;
- (4) vale l'uguaglianza

$$\int_S f d\mathcal{L}^{m+n} = \int_{\mathbb{R}^m} \left[ \int_{S_x} f(x, y) d\mathcal{L}^n(y) \right] d\mathcal{L}^m(x).$$

[\* XIV settimana (16/12/2019); 56 \*]

OSSERVAZIONE 2.13. Usando Teorema 2.8 e la sottostante Proposizione 2.7, si prova facilmente il seguente risultato sulla "compatibilità misura-integrale". Siano dati una misura esterna  $\sigma$ -finita  $\mu : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ , una funzione  $\mu$ -misurabile  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  e  $\Omega \in \mathcal{M}_\mu$ . Osserviamo che  $f\chi_\Omega$  è  $\mu$ -misurabile e non negativa, quindi essa è integrabile (per Teorema 2.3). Definiamo il sottografico di  $f|_\Omega$ :

$$S_{f|_\Omega} := \{(x, t) \in \Omega \times [0, +\infty] \mid 0 \leq t < f(x)\}.$$

Applicando Proposizione 2.7 in  $(X, \mathcal{M}_\mu, \mu|_{\mathcal{M}_\mu})$ , troviamo una successione di funzioni numerabilmente semplici e misurabili  $s_j : X \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $0 \leq s_j \leq s_{j+1} \leq f$  e  $s_j$  converge puntualmente a  $f$ . Ne consegue facilmente che

$$S_{f|\Omega} = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{s_j|\Omega}.$$

Inoltre, per un passo della dimostrazione di Teorema 2.8 in cui si prova che  $\mathcal{M}_\mu \times \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1} \subset \mathcal{M}_{\mu \times \mathcal{L}^1}$ , si ha  $S_{s_j|\Omega} \in \mathcal{M}_{\mu \times \mathcal{L}^1}$  per ogni  $j$ . Allora  $S_{f|\Omega} \in \mathcal{M}_{\mu \times \mathcal{L}^1}$ . Dallo stesso Teorema 2.8 otteniamo che:

- $(S_{f|\Omega})_x \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}$  per  $\mu$ -q.o.  $x \in X$  e  $x \mapsto \mathcal{L}^1((S_{f|\Omega})_x)$  è  $\mu$ -misurabile e quindi  $\mu$ -integrabile. Osserviamo che in questo caso speciale tali fatti sono ovvi in quanto

$$(S_{f|\Omega})_x = [0, f(x)) \text{ se } x \in \Omega, \quad (S_{f|\Omega})_x = \emptyset \text{ se } x \in X \setminus \Omega$$

e

$$\mathcal{L}^1((S_{f|\Omega})_x) = (f\chi_\Omega)(x), \quad x \in X;$$

- Si ha

$$(\mu \times \mathcal{L}^1)(S_{f|\Omega}) = \int \mathcal{L}^1((S_{f|\Omega})_x) d\mu(x) = \int (f\chi_\Omega)(x) d\mu(x) = \int_\Omega f d\mu.$$

Nel caso speciale  $X = \mathbb{R}^m$  e  $\mu = \mathcal{L}^m$ , ricordando anche Proposizione 2.6, si trova

$$\mathcal{L}^{m+1}(S_{f|\Omega}) = \int_\Omega f d\mathcal{L}^m.$$

Ecco l'enunciato del teorema di approssimazione appena usato (per una dimostrazione vedasi [5, Theorem 5.24]).

**PROPOSIZIONE 2.7.** *Siano dati uno spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \alpha)$  e una funzione misurabile  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ . Allora esiste una successione di funzioni numerabilmente semplici e misurabili  $s_j : X \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $\text{Im}(s_j)$  è finito,  $0 \leq s_j \leq s_{j+1} \leq f$  e  $s_j$  converge puntualmente a  $f$ .*

Esempi.

[\* XV settimana (17/02/2020); 60 \*]

## 5. La formula dell'area

**Premessa intuitiva sulle parametrizzazioni.** Esempi di parametrizzazione. Una parametrizzazione “regolare” può avere immagine non “liscia” e una parametrizzazione non “regolare” può avere immagine “liscia”.

Enunciamo ora la definizione rigorosa di parametrizzazione regolare.

DEFINIZIONE 2.7. Siano  $n$  e  $N$  due numeri interi positivi tali che  $n \leq N$ . Allora una “ $(n, N)$ -parametrizzazione regolare” (o semplicemente “parametrizzazione regolare”) è una mappa  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}^N$  tale che

(i)  $C$  è un sottoinsieme compatto di  $\mathbb{R}^n$  ed esiste un aperto  $A$  in  $\mathbb{R}^n$  soddisfacente

$$C = \bar{A}, \quad \mathcal{L}^n(\partial A) = 0;$$

(ii)  $\varphi|_A$  è iniettiva;

(iii)  $\varphi$  è di classe  $C^1$ , cioè esistono un aperto  $U$  in  $\mathbb{R}^n$  e una mappa  $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$  tali che

$$C \subset U, \quad \Phi|_C = \varphi;$$

(iv) Per ogni  $x \in A$  si ha

$$J\varphi(x) := \left( \det[D\varphi(x)^t \times D\varphi(x)] \right)^{1/2} \neq 0.$$

Tale funzione è detta “fattore di trasformazione (associato a  $\varphi$ )”.

OSSERVAZIONE 2.14. Nelle ipotesi di Definizione 2.7, se  $x \in \partial A$  si ha

$$\left( \det[D\Phi(x)^t \times D\Phi(x)] \right)^{1/2} = \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} \left( \det[D\Phi(a)^t \times D\Phi(a)] \right)^{1/2} = \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a \in A}} J\varphi(a).$$

Quindi la funzione

$$x \mapsto \left( \det[D\Phi(x)^t \times D\Phi(x)] \right)^{1/2}, \quad x \in \bar{A} = C$$

non dipende dalla scelta dell'estensione  $\Phi$  (ma solo da  $\varphi$ ) e per questo motivo sarà indicata, quando servirà, con la stessa notazione  $J\varphi$ .

OSSERVAZIONE 2.15. Adottiamo la notazione introdotta in Definizione 2.7. Allora:

- Per una  $(1, N)$ -parametrizzazione regolare si ha

$$J\varphi(x) = |\varphi'(x)|, \quad \text{per ogni } x \in A;$$

- Per una  $(2, 3)$ -parametrizzazione regolare si ha

$$J\varphi(x) = |D_1\varphi(x) \times D_2\varphi(x)|, \quad \text{per ogni } x \in A;$$

- Per una  $(n, n)$ -parametrizzazione regolare si ha

$$J\varphi(x) = |\det D\varphi(x)|, \quad \text{per ogni } x \in A.$$

Vale il seguente risultato di cui dimostriamo solo il caso delle superfici ( $n = 2, N = 3$ ).

PROPOSIZIONE 2.8 (\*\*). Sia  $\varphi$  una  $(n, N)$ -parametrizzazione regolare. Allora  $\varphi(A)$  è una sottovarietà  $n$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^N$  di classe  $C^1$  (dove  $A$  è come in Definizione 2.7). Se  $x \in A$  allora  $\{D_1\varphi(x), \dots, D_n\varphi(x)\}$  è una base dello spazio tangente a  $\varphi(A)$  nel punto  $\varphi(x)$ .



**OSSERVAZIONE 2.16.** Considerazioni intuitive ci convincono facilmente del seguente fatto (che si prova rigorosamente combinando la formula dell'area e [15, Theorem 6.27]) concernente le curve:

Se  $C$  è un intervallo compatto di  $\mathbb{R}$  e  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}^N$  è una  $(1, N)$ -parametrizzazione regolare, allora  $\mathcal{H}^1(\varphi(C))$  coincide con l'estremo superiore della lunghezza delle curve poligonali inscritte in  $\varphi(C)$ .

L'esempio di Schwarz mostra che un fatto analogo non sussiste per le superfici. Infatti esso prova che ogni superficie semicilindrica  $E$  è approssimabile (con arbitrario grado di precisione) mediante superfici poliedrali inscritte in  $E$  e aventi facce "trasversali" alla stessa  $E$ . Ciò consente a tali superfici approssimanti di avere area arbitrariamente grande. In altri termini, l'estremo superiore dell'area delle superfici poliedrali inscritte in  $E$  vale  $+\infty$ .

**Trattazione intuitiva della formula dell'area.** Le seguenti considerazioni si riferiscono esplicitamente a una  $(2, 3)$ -parametrizzazione regolare  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ma si estendono in modo semplice e naturale a una  $(n, N)$ -parametrizzazione regolare.

L'esempio di Schwarz ci fa capire come sia necessario produrre superfici poliedrali approssimanti aventi le facce che "si dispongono sempre di più in posizione tangente a  $\varphi(C)$ , al crescere del grado di approssimazione". Descriviamo un modo per farlo:

- Preso  $P_0 \in A$ , siano  $T(\varepsilon)$  e  $T_\varphi(\varepsilon)$ , rispettivamente, il triangolo interno ad  $A$  di vertici  $P_0$ ,  $P_0 + (\varepsilon, 0)$ ,  $P_0 + (0, \varepsilon)$  e quello inscritto in  $\varphi(C)$  di vertici  $\varphi(P_0)$ ,  $\varphi(P_0 + (\varepsilon, 0))$ ,  $\varphi(P_0 + (0, \varepsilon))$ . Da

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(P_0 + (\varepsilon, 0)) - \varphi(P_0)}{\varepsilon} = D_1\varphi(P_0), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(P_0 + (0, \varepsilon)) - \varphi(P_0)}{\varepsilon} = D_2\varphi(P_0)$$

e poiché  $\{D_1\varphi(P_0), D_2\varphi(P_0)\}$  è una base dello spazio tangente a  $\varphi(C)$  in  $\varphi(P_0)$ , concludiamo che il triangolo  $T_\varphi(\varepsilon)$  tende a disporsi "in posizione tangente" a  $\varphi(C)$  in  $\varphi(P_0)$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}^2(T_\varphi(\varepsilon))}{\mathcal{L}^2(T(\varepsilon))} &= \frac{||[\varphi(P_0 + (\varepsilon, 0)) - \varphi(P_0)] \times [\varphi(P_0 + (0, \varepsilon)) - \varphi(P_0)]||/2}{\varepsilon^2/2} \\ &= \left| \frac{\varphi(P_0 + (\varepsilon, 0)) - \varphi(P_0)}{\varepsilon} \times \frac{\varphi(P_0 + (0, \varepsilon)) - \varphi(P_0)}{\varepsilon} \right| \end{aligned}$$

e quindi (ricordando anche il secondo punto di Osservazione 2.15)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}^2(T_\varphi(\varepsilon))}{\mathcal{L}^2(T(\varepsilon))} = |D_1\varphi(P_0) \times D_2\varphi(P_0)| = J\varphi(P_0).$$

Il numero  $J\varphi(P_0)$  può pertanto essere interpretato come "fattore di trasformazione dell'area indotto da  $\varphi$  in  $P_0$ ".

- Consideriamo, nel piano, il reticolo triangolare isoscele-retto di passo  $\varepsilon$  e sia  $\{T_i(\varepsilon) \mid i = 1, \dots, N(\varepsilon)\}$  la famiglia dei triangoli individuati da tale reticolo che sono contenuti in  $A$ . Indichiamo con  $P_i(\varepsilon)$  il vertice del triangolo  $T_i(\varepsilon)$  corrispondente all'angolo retto e sia  $T_{\varphi,i}(\varepsilon)$  il triangolo inscritto in  $\varphi(C)$  di vertici  $\varphi(P_i(\varepsilon))$ ,  $\varphi(P_i(\varepsilon) + (\varepsilon, 0))$ ,  $\varphi(P_i(\varepsilon) + (0, \varepsilon))$ . Allora la superficie poliedrale

$$\bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} T_{\varphi,i}(\varepsilon)$$

è inscritta in  $\varphi(C)$  e ha la proprietà “desiderata”: le sue facce “tendono a disporsi in posizione tangente” quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Inoltre, se  $f : \varphi(C) \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} f(\varphi(P_i(\varepsilon))) \mathcal{H}^2(T_{\varphi,i}(\varepsilon)) &= \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} f(\varphi(P_i(\varepsilon))) \frac{\mathcal{H}^2(T_{\varphi,i}(\varepsilon))}{\mathcal{L}^2(T_i(\varepsilon))} \mathcal{L}^2(T_i(\varepsilon)) \\ &= \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} f(\varphi(P_i(\varepsilon))) \delta_i(\varepsilon) \mathcal{L}^2(T_i(\varepsilon)) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} f(\varphi(P_i(\varepsilon))) J\varphi(P_i(\varepsilon)) \mathcal{L}^2(T_i(\varepsilon)) \end{aligned}$$

dove

$$\delta_i(\varepsilon) := \frac{\mathcal{H}^2(T_{\varphi,i}(\varepsilon))}{\mathcal{L}^2(T_i(\varepsilon))} - J\varphi(P_i(\varepsilon)).$$

[\* XVI settimana (24/02/2020); 64 \*]

La combinazione dei due punti precedenti fornisce uno sketch di prova della formula dell'area per una (2, 3)-parametrizzazione regolare:

$$\int_{\varphi(C)} f d\mathcal{H}^2 = \int_A (f \circ \varphi) J\varphi d\mathcal{L}^2.$$

Ora possiamo finalmente enunciare efficacemente il teorema generale della formula dell'area, per una dimostrazione completa del quale si rimanda a [7, 8] (per esempio).

**TEOREMA 2.11** (Formula dell'area). *Siano date una  $(n, N)$ -parametrizzazione regolare  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}^N$  e una funzione continua  $f : \varphi(C) \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora vale l'identità*

$$\int_{\varphi(C)} f d\mathcal{H}^n = \int_A (f \circ \varphi) J\varphi d\mathcal{L}^n \left( = \int_C (f \circ \varphi) J\varphi d\mathcal{L}^n \right).$$

**OSSERVAZIONE 2.17.** Nelle ipotesi di Teorema 2.11, risalendo direttamente alla definizione di  $\mathcal{H}^n$ , non è difficile provare che  $\mathcal{H}^n(\varphi(\partial A)) = 0$ . Quindi, essendo  $\varphi(C) \setminus \varphi(A) \subset \varphi(\partial A)$ , si ha anche  $\mathcal{H}^n(\varphi(C)) = \mathcal{H}^n(\varphi(A))$  e, più in generale,

$$\int_{\varphi(C)} f d\mathcal{H}^n = \int_{\varphi(A)} f d\mathcal{H}^n.$$

COROLLARIO 2.5 (°). Siano  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $\psi : K \rightarrow \mathbb{R}^N$  due  $(n, N)$ -parametrizzazioni regolari aventi la stessa immagine  $E$  (i.e.  $\varphi(C) = \psi(K) = E$ ) e sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora

$$\int_C (f \circ \varphi) J\varphi d\mathcal{L}^n = \int_K (f \circ \psi) J\psi d\mathcal{L}^n.$$

Da Teorema 2.11 e dai primi due punti di Osservazione 2.15 segue subito il seguente risultato.

COROLLARIO 2.6 (°). Valgono i seguenti fatti (dove  $A$  è come in Definizione 2.7):

- (1) Se  $\gamma : C \rightarrow \mathbb{R}^N$  è una  $(1, N)$ -parametrizzazione regolare e se  $f : \gamma(C) \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, allora

$$\int_{\gamma(C)} f d\mathcal{H}^1 = \int_A (f \circ \gamma) |\gamma'| d\mathcal{L}^1;$$

- (2) Se  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una  $(2, 3)$ -parametrizzazione regolare e se  $f : \varphi(C) \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, allora

$$\int_{\varphi(C)} f d\mathcal{H}^2 = \int_A (f \circ \varphi) |D_1\varphi \times D_2\varphi| d\mathcal{L}^2.$$

Da Teorema 2.11, dal terzo punto di Osservazione 2.15 e da (2) in Teorema 1.10 segue poi la seguente formula per il cambiamento di variabile nell'integrale.

COROLLARIO 2.7 (°). Se  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una  $(n, n)$ -parametrizzazione regolare e se  $f : \varphi(C) \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, allora

$$\int_{\varphi(C)} f d\mathcal{L}^n = \int_A (f \circ \varphi) |\det(D\varphi)| d\mathcal{L}^n$$

dove  $A$  è come in Definizione 2.7.

## 6. Formule di Gauss-Green

Per discutere la nozione di orientazione di una parametrizzazione è utile la seguente definizione

DEFINIZIONE 2.8. (1) Se  $\gamma : C \rightarrow \mathbb{R}^N$  ( $C = \overline{A}$ ) è una  $(1, N)$ -parametrizzazione regolare, allora il “campo tangente unitario a  $\gamma$ ” è definito come segue:

$$\tau_\gamma : A \rightarrow \mathbb{S}^{N-1}, \quad \tau_\gamma := \frac{\gamma'}{|\gamma'|};$$

- (2) Se  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $C = \overline{A}$ ) è una  $(2, 3)$ -parametrizzazione regolare, allora “il campo normale a  $\varphi$ ” è:

$$\nu_\varphi : A \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad \nu_\varphi := \frac{D_1\varphi \times D_2\varphi}{|D_1\varphi \times D_2\varphi|}.$$

Passiamo ora a definire le nozioni di curva regolare a tratti e di superficie regolare a tratti.

**DEFINIZIONE 2.9.** *Si consideri una famiglia finita di  $(1, N)$ -parametrizzazioni regolari*

$$\gamma_i : C_i \rightarrow \mathbb{R}^N \quad (i = 1, \dots, k)$$

*tali che, posto  $\Gamma_i := \gamma_i(C_i)$ :*

- (i)  $C_i$  è un intervallo;
- (ii)  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma_j$  per ogni  $i, j$  con  $i \neq j$ .

*Allora  $\Gamma := \cup_{i=1}^k \Gamma_i$  è detta “curva regolare a tratti” (risp. “curva regolare”, se  $k = 1$ ). Ogni  $\Gamma_i$  è detto “tratto regolare” di  $\Gamma$ . Inoltre (ricordando che, per Definizione 2.7, esiste un aperto  $A_i$  tale che  $\overline{A_i} = C_i$  eccetera...) l’insieme  $\Gamma_i^* := \gamma_i(A_i)$  è detto “parte interna” di  $\Gamma_i$ . Infine, se  $\tau$  è il campo vettoriale definito come segue*

$$\tau : \cup_{i=1}^k \Gamma_i^* \rightarrow \mathbb{S}^{N-1}, \quad \tau|_{\Gamma_i^*} := \tau_{\gamma_i} \circ (\gamma_i|_{A_i})^{-1}$$

*allora la coppia  $(\Gamma, \tau)$  è detta “curva regolare a tratti orientata” e la famiglia  $\{\gamma_i\}$  è detta “parametrizzazione” di  $(\Gamma, \tau)$ .*

**DEFINIZIONE 2.10.** *Si consideri una famiglia finita di  $(2, 3)$ -parametrizzazioni regolari*

$$\varphi_i : C_i \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (i = 1, \dots, k)$$

*tali che, posto  $\Sigma_i := \varphi_i(C_i)$ :*

- (i)  $\partial C_i$  è una curva regolare a tratti;
- (ii)  $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \partial\Sigma_i \cap \partial\Sigma_j$  per ogni  $i, j$  con  $i \neq j$ .

*Allora  $\Sigma := \cup_{i=1}^k \Sigma_i$  è detta “superficie regolare a tratti” (risp. “superficie regolare”, se  $k = 1$ ). Ogni  $\Sigma_i$  è detto “tratto regolare” di  $\Sigma$ . Inoltre (ricordando che, per Definizione 2.7, esiste un aperto  $A_i$  tale che  $\overline{A_i} = C_i$  eccetera...) l’insieme  $\Sigma_i^* := \varphi_i(A_i)$  è detto “parte interna” di  $\Sigma_i$ . Infine, se  $\nu$  è il campo vettoriale definito come segue*

$$\nu : \cup_{i=1}^k \Sigma_i^* \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad \nu|_{\Sigma_i^*} := \nu_{\varphi_i} \circ (\varphi_i|_{A_i})^{-1}$$

*allora la coppia  $(\Sigma, \nu)$  è detta “superficie regolare a tratti orientata” e la famiglia  $\{\varphi_i\}$  è detta “parametrizzazione” di  $(\Sigma, \nu)$ .*

**OSSERVAZIONE 2.18.** Se  $(\Gamma, \tau)$  è una curva regolare a tratti orientata, allora  $\tau$  è continuo nella parte interna di ogni tratto regolare di  $\Gamma$ . Analogamente, se  $(\Sigma, \nu)$  è una superficie regolare a tratti orientata, allora  $\nu$  è continuo nella parte interna di ogni tratto regolare di  $\Sigma$ .

**OSSERVAZIONE 2.19.** Valgono i seguenti fatti:

- Se  $\Gamma$  è una curva regolare a tratti, allora si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1\left(\Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i^*\right) &= \mathcal{H}^1\left(\bigcup_{i=1}^k \Gamma_i \setminus \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i^*\right) \\ &= \mathcal{H}^1\left(\bigcup_{i=1}^k (\Gamma_i \setminus \Gamma_i^*)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \mathcal{H}^1(\Gamma_i \setminus \Gamma_i^*)\end{aligned}$$

dove  $\Gamma_i \setminus \Gamma_i^*$  contiene al più da due punti e quindi  $\mathcal{H}^1(\Gamma_i \setminus \Gamma_i^*) = 0$ . Abbiamo così provato che

$$\mathcal{H}^1\left(\Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i^*\right) = 0.$$

Quindi, se per ogni  $i = 1, \dots, k$  si ha una funzione continua e limitata  $f_i : \Gamma_i^* \rightarrow \mathbb{R}$ , allora

$$f : \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad f|_{\Gamma_i^*} := f_i$$

è una funzione definita  $\mathcal{H}^1$ -q.o. in  $\Gamma$  e si ha

$$\int_{\Gamma} f d\mathcal{H}^1 = \int_{\bigcup_{i=1}^k \Gamma_i^*} f d\mathcal{H}^1 = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i^*} f d\mathcal{H}^1 = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i^*} f_i d\mathcal{H}^1.$$

- Se  $\Sigma$  è una superficie regolare a tratti, allora si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^2\left(\Sigma \setminus \bigcup_{i=1}^k \Sigma_i^*\right) &= \mathcal{H}^2\left(\bigcup_{i=1}^k \Sigma_i \setminus \bigcup_{i=1}^k \Sigma_i^*\right) \\ &= \mathcal{H}^2\left(\bigcup_{i=1}^k (\Sigma_i \setminus \Sigma_i^*)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \mathcal{H}^2(\Sigma_i \setminus \Sigma_i^*) \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\mathcal{H}^2(\Sigma_i) - \mathcal{H}^2(\Sigma_i^*)\right)\end{aligned}$$

dove, per la formula dell'area, si ha

$$\mathcal{H}^2(\Sigma_i) = \mathcal{H}^2(\varphi_i(C_i)) = \int_{\varphi_i(C_i)} 1 d\mathcal{H}^2 = \int_{\varphi_i(A_i)} 1 d\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2(\varphi_i(A_i)) = \mathcal{H}^2(\Sigma_i^*).$$

Abbiamo così provato che

$$\mathcal{H}^2\left(\Sigma \setminus \bigcup_{i=1}^k \Sigma_i^*\right) = 0.$$

Quindi, se per ogni  $i = 1, \dots, k$  si ha una funzione continua e limitata  $f_i : \Sigma_i^* \rightarrow \mathbb{R}$ , allora

$$f : \bigcup_{i=1}^k \Sigma_i^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad f|_{\Sigma_i^*} := f_i$$

è una funzione definita  $\mathcal{H}^2$ -q.o. in  $\Sigma$  e si ha

$$\int_{\Sigma} f d\mathcal{H}^2 = \int_{\bigcup_{i=1}^k \Sigma_i^*} f d\mathcal{H}^2 = \sum_{i=1}^k \int_{\Sigma_i^*} f d\mathcal{H}^2 = \sum_{i=1}^k \int_{\Sigma_i^*} f_i d\mathcal{H}^2.$$

Grazie a Osservazione 2.18 e a Osservazione 2.19 si può dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE 2.11. *Dati una curva regolare a tratti orientata  $(\Gamma, \tau)$  in  $\mathbb{R}^N$  e un campo continuo  $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^N$ , si definisce l'“integrale di  $F$  su  $(\Gamma, \tau)$ ” come segue:*

$$\int_{(\Gamma, \tau)} F := \int_{\Gamma} F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1.$$

*Analogamente, dati una superficie regolare a tratti orientata  $(\Sigma, \nu)$  e un campo continuo  $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ , si definisce l'“integrale di  $F$  su  $(\Sigma, \nu)$ ” come segue:*

$$\int_{(\Sigma, \nu)} F := \int_{\Sigma} F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^2.$$

Da Definizione 2.9, Definizione 2.10 e Definizione 2.11 segue subito il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 2.9 (\*). *Sia  $(\Gamma, \tau)$  una curva regolare a tratti orientata in  $\mathbb{R}^N$  e sia  $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^N$  un campo continuo. Allora, se  $\{\gamma_i\}$  è una parametrizzazione di  $(\Gamma, \tau)$ , si ha:*

$$\int_{(\Gamma, \tau)} F = \sum_i \int_{A_i} (F \circ \gamma_i) \cdot \gamma_i' \, d\mathcal{L}^1.$$

*Analogamente, sia  $(\Sigma, \nu)$  una superficie regolare a tratti orientata e sia  $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo continuo. Allora, se  $\{\varphi_i\}$  è una parametrizzazione di  $(\Sigma, \nu)$ , si ha:*

$$\int_{(\Sigma, \nu)} F = \sum_i \int_{A_i} (F \circ \varphi_i) \cdot (D_1\varphi_i \times D_2\varphi_i) \, d\mathcal{L}^2.$$

DEFINIZIONE 2.12. *Un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}^2$  è detto “ $x_2$ -semplice” se esistono due funzioni continue*

$$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad (-\infty < a < b < +\infty)$$

*con le seguenti proprietà:*

- (i)  $E = \{x \in [a, b] \times \mathbb{R} \mid f(x_1) \leq x_2 \leq g(x_1)\}$  (in particolare  $E$  è compatto);
- (ii) Esistono  $a_i \in [a, b]$  ( $i = 0, \dots, k$ ) con  $a_0 = a$ ,  $a_k = b$  e  $a_i < a_{i+1}$  tali che le funzioni  $f|_{[a_i, a_{i+1}]}$  e  $g|_{[a_i, a_{i+1}]}$  sono di classe  $C^1$  (per  $i = 0, \dots, k-1$ ).

*In modo del tutto analogo si definiscono gli insiemi  $x_1$ -semplici. Un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  si dice “semplice” se esso è  $x_i$ -semplice per  $i = 1, 2$ . Infine chiameremo “insieme composto” ogni unione finita di insiemi semplici  $E_i$  tali che  $E_i \cap E_j = \partial E_i \cap \partial E_j$  per ogni  $i, j$  con  $i \neq j$ .*

DEFINIZIONE 2.13. *Un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}^3$  è detto “ $x_3$ -semplice” se esistono una famiglia finita  $\{C_1, \dots, C_k\}$  di sottoinsiemi compatti di  $\mathbb{R}^2$  e due funzioni continue*

$$f, g : C \rightarrow \mathbb{R}, \quad C := C_1 \cup \dots \cup C_k$$

*tali che:*

- (i)  $E = \{x \in C \times \mathbb{R} \mid f(x_1, x_2) \leq x_3 \leq g(x_1, x_2)\}$  (in particolare  $E$  è compatto);
- (ii) Ogni  $C_i$  è la chiusura di un aperto la cui frontiera è una curva regolare a tratti;

- (iii)  $C_i \cap C_j = \partial C_i \cap \partial C_j$  per ogni  $i, j$  con  $i \neq j$ ;
- (iv) Per ogni  $i$ , le funzioni  $f|_{C_i}$  e  $g|_{C_i}$  sono di classe  $C^1$ .

In modo del tutto analogo si definiscono gli insiemi  $x_1$ -semplici e gli insiemi  $x_2$ -semplici. Un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  si dice “semplice” se esso è  $x_i$ -semplice per  $i = 1, 2, 3$ . Infine chiameremo “insieme composto” ogni unione finita di insiemi semplici  $E_i$  tali che  $E_i \cap E_j = \partial E_i \cap \partial E_j$  per ogni  $i, j$  con  $i \neq j$ .

OSSERVAZIONE 2.20. Se  $E$  è un sottoinsieme composto di  $\mathbb{R}^2$  (risp.  $\mathbb{R}^3$ ), allora  $\partial E$  è una curva (risp. superficie) regolare a tratti. Pertanto ogni funzione continua e limitata nelle parti interne dei tratti regolari di  $\partial E$  risulta essere integrabile in  $\partial E$ .

Possiamo finalmente enunciare e provare il teorema relativo alle formule di Gauss-Green in  $\mathbb{R}^3$  (Teorema di Gauss della divergenza).

TEOREMA 2.12 (\*\*). Sia  $E$  un sottoinsieme composto di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $\nu$  il campo di vettori normali esterni definito nelle parti interne dei tratti regolari di  $\partial E$ . Allora per ogni funzione  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  vale l'identità

$$\int_E D_i h \, d\mathcal{L}^3 = \int_{\partial E} h \nu_i \, d\mathcal{H}^2 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Quindi, se  $F : E \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un campo vettoriale di classe  $C^1$ , si ha

$$\int_E \operatorname{div} F \, d\mathcal{L}^3 = \int_{\partial E} F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^2.$$

Poiché  $(\partial E, \nu)$  è una superficie regolare a tratti orientata, quest'ultima identità si può riscrivere come segue:

$$\int_E \operatorname{div} F \, d\mathcal{L}^3 = \int_{(\partial E, \nu)} F.$$

Lo stesso argomento prova anche il seguente teorema di Green nel piano.

TEOREMA 2.13 (\*). Si consideri un sottoinsieme composto  $E$  di  $\mathbb{R}^2$ . Sia  $\tau_E = (\tau_{E,1}, \tau_{E,2})$  il campo di vettori unitari tangenti a  $\partial E$  continuo nelle parti interne dei tratti regolari e tale che  $\nu_E := (\tau_{E,2}, -\tau_{E,1})$  sia il campo di vettori normali esterni a  $\partial E$ . Allora per ogni funzione  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  vale l'identità

$$\int_E D_i h \, d\mathcal{L}^2 = \int_{\partial E} h \nu_{E,i} \, d\mathcal{H}^1 \quad (i = 1, 2).$$

Quindi, se  $F : E \rightarrow \mathbb{R}^2$  è un campo vettoriale di classe  $C^1$ , si ha

$$\int_E \operatorname{div} F \, d\mathcal{L}^2 = \int_{\partial E} F \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^1.$$

Infine  $(\partial E, \tau_E)$  è una curva regolare a tratti orientata e

$$\int_{(\partial E, \tau_E)} F = \int_E (D_1 F_2 - D_2 F_1) \, d\mathcal{L}^2.$$

OSSERVAZIONE 2.21. Sia  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}^3$  una  $(2, 3)$ -parametrizzazione regolare ( $C = \overline{A}$ , con la notazione di Definizione 2.7). Consideriamo un sottoinsieme composto  $E$  di  $A$  e definiamo il campo vettoriale  $\tau_E$  come in Teorema 2.13. Sappiamo allora che  $(\partial E, \tau_E)$  è una curva regolare a tratti orientata. Sia  $\{\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid i = 1, \dots, k\}$  una sua parametrizzazione e sia  $(S, \nu)$  la superficie regolare orientata determinata da  $\varphi|_E$ , i.e.

$$S := \varphi(E), \quad \nu := \nu_\varphi \circ (\varphi|_E)^{-1}.$$

Osserviamo che ogni  $\varphi \circ \gamma_i$  è una  $(1, 3)$ -parametrizzazione regolare e la famiglia  $\{\varphi \circ \gamma_i\}$  soddisfa le ipotesi di Definizione 2.9. Pertanto tale famiglia genera una curva regolare a tratti orientata  $(\Gamma, \tau)$ , dove

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^k (\varphi \circ \gamma_i)([a_i, b_i]) = \varphi \left( \bigcup_{i=1}^k \gamma_i([a_i, b_i]) \right) = \varphi(\partial E) = \partial S$$

e, per ogni  $i = 1, \dots, k$

$$\tau \circ (\varphi \circ \gamma_i)(t) = \frac{(\varphi \circ \gamma_i)'(t)}{|(\varphi \circ \gamma_i)'(t)|}, \quad t \in (a_i, b_i).$$

Vale il seguente teorema di Stokes.

TEOREMA 2.14 (\*\*). *Nelle ipotesi e con la notazione di Osservazione 2.21, se  $U$  è un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^3$  contenente  $S$  e se  $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$  allora si ha*

$$\int_{(S, \nu)} \text{rot } F = \int_{(\partial S, \tau)} F$$

e quindi anche

$$\int_{(S, -\nu)} \text{rot } F = \int_{(\partial S, -\tau)} F.$$

Esempi.

Esempi.



## CHAPTER 3

### Spazi $L^p$ e serie di Fourier

#### 1. Spazi $L^p$

OSSERVAZIONE 3.1. Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura e sia  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una funzione misurabile. Indichiamo allora con  $\mathcal{M}_f$  l'insieme dei maggioranti essenziali di  $|f|$  e cioè:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f &:= \{M \in [0, +\infty] \mid M \geq |f(x)| \text{ per } \mu\text{-q.o. } x\} \\ &= \{M \in [0, +\infty] \mid \mu(\{x \mid M < |f(x)|\}) = 0\}.\end{aligned}$$

Allora valgono i seguenti fatti:

- $\mathcal{M}_f$  è una semiretta destra;
- $\mathcal{M}_f$  è chiusa, i.e.  $\inf \mathcal{M}_f \in \mathcal{M}_f$ .

DEFINIZIONE 3.1. Siano  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura e  $p \in [1, +\infty]$ . Per ogni funzione misurabile  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , poniamo

$$\|f\|_p := \begin{cases} (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < +\infty, \\ \min \mathcal{M}_f & \text{se } p = +\infty. \end{cases}$$

Indicheremo con  $L^p(X)$  la classe delle funzioni misurabili  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tali che  $\|f\|_p < \infty$ .

TEOREMA 3.1 (\*). Siano  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  spazio con misura,  $p \in [1, +\infty]$  e  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  misurabile. Allora

- (1)  $\|f\|_p \geq 0$ ;
- (2)  $\|f\|_p = 0$  se e solo se  $f = 0$  quasi ovunque (rispetto a  $\mu$ );
- (3)  $\|cf\|_p = |c| \|f\|_p$ , per ogni  $c \in \mathbb{R}$ .

TEOREMA 3.2 (Disuguaglianza di Hölder (\*\*)). Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura e siano  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  due funzioni misurabili. Allora

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

dove  $p, p' \in [1, +\infty]$  sono coniugati, cioè verificano una fra le seguenti ipotesi alternative:

- (i)  $p = 1$  e  $p' = +\infty$  (o viceversa);

(ii)  $p, p' \in (1, +\infty)$  e

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

**TEOREMA 3.3 (\*\*).** *Siano  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  spazio con misura e  $p \in [1, +\infty]$ . Allora, per ogni coppia di funzioni misurabili  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tale che  $f + g$  sia ben definita (per esempio  $f, g \in L^p(X)$ ), vale la disuguaglianza triangolare*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (\text{Disuguaglianza di Minkowski}).$$

**OSSERVAZIONE 3.2.** Facendo il quoziente di  $L^p(X)$  rispetto alla relazione di equivalenza

$$f \sim g \quad \text{se e solo se} \quad f = g \text{ q.o. (rispetto a } \mu)$$

si ottiene in modo naturale uno spazio vettoriale. Inoltre la funzione

$$(1.1) \quad L^p(X)/\sim \rightarrow [0, +\infty), \quad [f] \mapsto \|f\|_p := \|f\|_p$$

è una norma. Per semplificare la notazione, è consuetudine denotare tale spazio vettoriale ancora con  $L^p(X)$  e identificare  $[f]$  con  $f$  tutte le volte in cui la formula non dipende dalla scelta della funzione nella classe di equivalenza. Per questo motivo la norma (1.1) della classe di equivalenza di  $f$  si indica ancora con  $\|f\|_p$ .

**TEOREMA 3.4 (Fisher-Riesz (\*\*\*)).** *Siano  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  spazio con misura e  $p \in [1, +\infty]$ . Allora lo spazio vettoriale normato  $(L^p(X)/\sim, \|\cdot\|_p)$  è uno spazio di Banach.*

Dalla dimostrazione di Teorema 3.4 segue subito il seguente risultato, che enunciamo senza ricorrere alla semplificazione notazionale descritta in Osservazione 3.2.

**PROPOSIZIONE 3.1 (°).** *Siano  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  spazio con misura e  $p \in [1, +\infty]$ . Allora ogni successione  $\{f_j\} \subset L^p(X)$  tale che  $\{[f_j]\}$  converge in  $L^p(X)/\sim$  ha una sottosuccessione convergente  $\mu$ -q.o. a una funzione di  $L^p(X)$ .*

**OSSERVAZIONE 3.3.** In generale una successione convergente in  $L^p(X)$  non converge q.o., fatta eccezione per il caso  $p = +\infty$  (esempio della “tendina”).

## 2. Serie di Fourier in uno spazio di Hilbert, un prontuario minimo (meno di così non si può...)

Introdurremo di seguito qualche elemento di teoria degli spazi di Hilbert (il minimo indispensabile per la trattazione delle serie di Fourier che ci siamo dati come obiettivo della parte finale del corso).

**PROPOSIZIONE 3.2 (\*).** *Se  $V$  è uno spazio vettoriale con un prodotto scalare  $(\cdot, \cdot)$ , allora la funzione*

$$v \mapsto \|v\| := (v, v)^{1/2}, \quad v \in V$$

*è una norma in  $V$  ed è detta “la norma indotta dal prodotto scalare  $(\cdot, \cdot)$ ”.*

**DEFINIZIONE 3.2.** *Uno “spazio di Hilbert” è uno spazio di Banach in cui la norma è indotta da un prodotto scalare.*

OSSERVAZIONE 3.4. Se  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  è uno spazio con misura, la norma  $\| \cdot \|_2$  è indotta dal prodotto scalare

$$(F, G)_2 := \int_X fg d\mu \quad (F, G \in L^2(X)/\sim)$$

dove  $f \in F$  e  $g \in G$ . Allora  $(L^2(X)/\sim, \| \cdot \|_2)$  è uno spazio di Hilbert.

DEFINIZIONE 3.3. Sia  $H$  uno spazio di Hilbert. Allora un sottoinsieme  $F$  di  $H$  è detto “famiglia ortonormale (in  $H$ )” se per ogni  $x, y \in F$  si ha

$$(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq y \\ 1 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Una “famiglia ortonormale completa (in  $H$ )” è una famiglia ortonormale  $F$  che soddisfa la seguente condizione: se  $h \in H$  è tale che  $(h, x) = 0$  per ogni  $x \in F$  allora si ha  $h = 0$ .

PROPOSIZIONE 3.3 (\*). Sia  $F$  una famiglia ortonormale in uno spazio di Hilbert  $H$  e si indichi con  $\Gamma$  lo spazio vettoriale delle combinazioni lineari finite di elementi di  $F$ . Se  $\Gamma$  è denso in  $H$  allora  $F$  è una famiglia ortonormale completa.

Come applicazione del Lemma di Zorn si prova facilmente l’esistenza di famiglie ortonormali complete, e.g. [5, Theorem 8.44].

TEOREMA 3.5. Ogni spazio di Hilbert  $H$  contiene una famiglia ortonormale completa. Se  $H$  è separabile allora ogni famiglia ortonormale (in particolare, ogni famiglia ortonormale completa) è numerabile.

TEOREMA 3.6 (\*\*). Sia  $F = \{u_1, u_2, \dots\}$  una famiglia ortonormale numerabile in uno spazio di Hilbert  $H$ . Valgono allora i seguenti fatti:

- (1) Se  $h \in H$  e  $c_1, c_2, \dots$  sono numeri reali, si ha

$$\left\| h - \sum_{i=1}^m (h, u_i) u_i \right\| \leq \left\| h - \sum_{i=1}^m c_i u_i \right\|$$

per ogni  $m \geq 1$ . Inoltre l’uguaglianza vale se e solo se  $c_i = (h, u_i)$ , per  $i = 1, \dots, m$ ;

- (2) Per ogni  $h \in H$  si ha  $\sum_i (h, u_i)^2 \leq \|h\|^2$  (disuguaglianza di Bessel);
- (3) Siano  $c_1, c_2, \dots$  numeri reali. Allora  $\sum_i c_i u_i$  converge in  $H$  se e soltanto se  $\sum_i c_i^2 < +\infty$ . In particolare, per ogni  $h \in H$ , la serie  $\sum_i (h, u_i) u_i$  converge in  $H$ ;
- (4) Se  $F$  è completa, per ogni  $h \in H$  si ha  $\sum_i (h, u_i) u_i = h$ . In particolare la serie  $\sum_i (h, u_i) u_i$  converge incondizionatamente, cioè la sua somma non dipende dall’ordine dei suoi addendi.

Un’importante applicazione della teoria precedente si ottiene considerando lo spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  indotto dalla misura esterna  $\mathcal{L}^1|_{2[-\pi, \pi]}$  e prendendo il corrispondente

spazio di Hilbert  $H := L^2(-\pi, \pi)$ , cfr. Osservazione 3.4. Si tratta della cosiddetta “teoria  $L^2$  delle serie di Fourier” che qui descriveremo sommariamente.

Prima di tutto è facile provare che il “sistema trigonometrico”

$$(2.1) \quad F := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

è una famiglia ortonormale in  $L^2(-\pi, \pi)$ . Da Teorema 3.6 si ottiene allora che se  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  allora:

- La “serie di Fourier di  $f$ ” definita come segue

$$(2.2) \quad \frac{1}{2\pi}(f, 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\pi}(f, \cos nt) \cos nt + \frac{1}{\pi}(f, \sin nt) \sin nt \right]$$

converge in  $L^2(-\pi, \pi)$ ;

- Vale la disuguaglianza di Bessel:

$$(2.3) \quad \frac{1}{2\pi}(f, 1)^2 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (f, \cos nt)^2 + (f, \sin nt)^2 \right] \leq \|f\|_2^2.$$

OSSERVAZIONE 3.5. Dalla disuguaglianza di Bessel (2.3) segue subito che per ogni  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = 0.$$

In realtà l’insieme  $F$  definito in (2.1) è una famiglia ortonormale completa. Questo fatto si può dimostrare utilizzando i seguenti due risultati di approssimazione, che enunciamo soltanto. Il primo si ottiene per regolarizzazione mediante prodotto di convoluzione [1, Corollario IV.23], mentre il secondo è una conseguenza del Teorema di Stone-Weierstrass [6, 18].

TEOREMA 3.7. *Lo spazio vettoriale  $C_c(-\pi, \pi)$  è denso in  $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$ .*

TEOREMA 3.8. *Sia  $\varphi \in C(K)$ , con  $K$  un sottoinsieme compatto di  $\mathbb{R}^n$ . Allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un polinomio  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\sup_K |\varphi - P| \leq \varepsilon$ .*

Infatti, da Teorema 3.7 e Teorema 3.8 otteniamo:

COROLLARIO 3.1 (\*\*). *Le combinazioni lineari finite di elementi del sistema trigonometrico (2.1) formano uno spazio vettoriale denso in  $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$ . Quindi, per Proposizione 3.3, il sistema trigonometrico è una famiglia ortonormale completa.*

Da Corollario 3.1 e Teorema 3.6(4) segue ora subito il seguente risultato.

COROLLARIO 3.2 (°). *Per ogni  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ , la serie di Fourier (2.2) converge incondizionatamente a  $f$  in  $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$ .*

Combinando Corollario 3.2 e Proposizione 3.1, otteniamo:

COROLLARIO 3.3 (°). Se  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ , allora esiste una sottosuccessione di

$$(2.4) \quad S_N(x) := \frac{1}{2\pi}(f, 1) + \sum_{n=1}^N \left[ \frac{1}{\pi}(f, \cos nt) \cos nx + \frac{1}{\pi}(f, \sin nt) \sin nx \right]$$

che converge puntualmente quasi ovunque in  $(-\pi, \pi)$  alla funzione  $f$ .

OSSERVAZIONE 3.6. Nel 1915 Lusin pose la questione della convergenza quasi ovunque di “tutta” la successione (2.4). La risposta affermativa venne oltre cinquant’anni dopo, in un profondo lavoro di Lennart Carleson [2].

### 3. Convergenza puntuale della serie di Fourier per una funzione regolare a tratti

Per questa ultima parte del corso, la bibliografia di riferimento è il secondo capitolo dell’opera [9].

DEFINIZIONE 3.4. Sia data una funzione  $2\pi$ -periodica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora:

- (i)  $f$  è detta “continua a tratti” se
- l’insieme  $D$  dei punti di discontinuità di  $f$  in  $[-\pi, \pi)$  è vuoto o finito
  - per ogni  $x_0 \in D$  esistono finiti i limiti sinistro e destro

$$f(x_0 - 0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \quad f(x_0 + 0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x);$$

- (ii)  $f$  è detta “regolare a tratti” se:
- è continua a tratti secondo la descrizione data in (i);
  - esiste un sottoinsieme finito  $E$  di  $[-\pi, \pi)$  tale che  $E \supset D$  e  $f$  ha derivata continua e limitata in  $[-\pi, \pi) \setminus E$ .

Vale il seguente risultato sulla convergenza puntuale e sulla convergenza puntuale uniforme.

TEOREMA 3.9. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica e regolare a tratti. Allora:

- (1) Per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , la serie di Fourier di  $f$  in  $x$  è uguale a

$$\frac{f(x - 0) + f(x + 0)}{2}.$$

In particolare, se  $f$  è continua in  $x$ , allora la serie di Fourier di  $f$  in  $x$  è uguale a  $f(x)$ .

- (2) La serie di Fourier di  $f$  converge uniformemente a  $f$  in ogni intervallo chiuso in cui  $f$  è continua;
- (3) Se  $f$  è continua, la sua serie di Fourier converge uniformemente a  $f$ .

OSSERVAZIONE 3.7. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica e regolare a tratti. Allora possiamo scrivere la serie di Fourier di  $f$ :

$$(3.1) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

dove

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

e

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Si vede subito che:

- (1) Se  $f$  è dispari, la (3.1) è una “serie di soli seni”, cioè  $a_n = 0$  per ogni  $n$  e si ha

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \quad (n = 1, 2, \dots);$$

- (2) Se  $f$  è pari, la (3.1) è una “serie di soli coseni”, cioè  $b_n = 0$  per ogni  $n$  e si ha

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

OSSERVAZIONE 3.8. Naturalmente la teoria della serie di Fourier che abbiamo presentato per le funzioni  $2\pi$ -periodiche può essere “riformulata” per le funzioni  $2L$ -periodiche: basta rifare tutto applicando i risultati astratti allo spazio di Hilbert  $H := L^2(-L, L)$ , dove lo spazio con misura considerato stavolta è quello indotto da  $\mathcal{L}^1|_{2[-L, L]}$ . Per cominciare, il sistema trigonometrico da utilizzare in questo caso è

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{\pi}{L} nt, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{\pi}{L} nt \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Eccetera.

OSSERVAZIONE 3.9. Dalle serie di Fourier di può ottenere una funzione continua in  $\mathbb{R}$  (e  $2\pi$ -periodica) che non è derivabile in alcun punto, si veda per esempio [10, Cap. 2, Sez. 6].

Esempi.

Esempi.

## Successioni e serie di funzioni

### 1. Successioni di funzioni

DEFINIZIONE 4.1. Sia  $X \subset \mathbb{R}$  e sia  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) una successione di funzioni. Allora l'insieme

$$D := \left\{ x \in X \mid \text{esiste finito } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right\}$$

è detto “insieme di convergenza puntuale” di  $\{f_n\}$ . La funzione

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

è detta “(funzione) limite puntuale di  $\{f_n\}$ ” e si scrive:  $f_n \rightarrow f$  in  $D$ .

DEFINIZIONE 4.2. Sia  $X \subset \mathbb{R}$  e sia  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) una successione di funzioni. Allora si dice che “ $\{f_n\}$  converge uniformemente in un sottoinsieme  $E$  di  $X$  a una funzione  $f$ ” se  $f$  è definita nei punti di  $E$  e se

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

OSSERVAZIONE 4.1. Se  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) converge uniformemente a  $f$  in  $E \subset \mathbb{R}$  allora  $f_n$  converge puntualmente a  $f$  in  $E$ , cioè  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$  per ogni  $x \in E$ .

ESEMPIO 4.1. La successione

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n$$

ha come insieme di convergenza  $D := (-1, 1]$  e come funzione limite

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-1, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Inoltre  $\{f_n\}$  converge uniformemente in ogni sottoinsieme chiuso di  $(-1, 1)$ , ma non converge uniformemente in  $(-1, 1)$  e quindi nemmeno in  $(-1, 1]$ .

TEOREMA 4.1 (\*\*). Sia  $X \subset \mathbb{R}$  e sia  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) una successione di funzioni che converge uniformemente alla funzione  $f$  in  $E \subset X$ . Se le funzioni  $f_n|_E$  sono continue in  $\bar{x} \in E$ , allora anche  $f|_E$  è continua in  $\bar{x}$ . In particolare:

- (1) Se le  $f_n|_E$  sono continue, allora anche  $f|_E$  è continua.
- (2) Se  $E = X$  e le  $f_n$  sono continue in  $\bar{x}$ , allora anche  $f$  è continua in  $\bar{x}$ .

OSSERVAZIONE 4.2. Il fatto che la successione in Esempio 4.1 non converga uniformemente in  $(-1, 1]$  segue anche da Teorema 4.1.

OSSERVAZIONE 4.3. Esempio 4.1 mostra che l'ipotesi di convergenza uniforme assunta in Teorema 4.1 non può essere sostituita da quella di convergenza puntuale. Sotto questa ipotesi più semplice la continuità non passa al limite nemmeno quando  $D = \mathbb{R}$ . Per esempio, se

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-\infty, 0] \\ nx & \text{se } x \in (0, 1/n) \\ 1 & \text{se } x \in [1/n, +\infty) \end{cases}$$

allora  $\{f_n\}$  è una successione di funzioni continue che converge puntualmente alla funzione caratteristica di  $(0, +\infty)$  in  $\mathbb{R}$ .

PROPOSIZIONE 4.1 (\*). Sia  $E \subset \mathbb{R}$ . Allora l'insieme

$$L^\infty(E) := \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x \in E} |f(x)| < +\infty \right\}$$

con le ordinarie operazioni di somma e di moltiplicazione per scalare delle funzioni è uno spazio vettoriale. Inoltre la mappa

$$L^\infty(E) \rightarrow [0, +\infty), \quad f \mapsto \sup_{x \in E} |f(x)|$$

è una norma, indicata con  $\|\cdot\|_{\infty, E}$ .

PROPOSIZIONE 4.2 (\*). Sia  $E \subset X \subset \mathbb{R}$  e sia  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) una successione di funzioni. Allora:

- (1) Se  $\{f_n\}$  converge uniformemente in  $E$  a  $f \in L^\infty(E)$ , allora  $f_n|_E \in L^\infty(E)$  definitivamente e  $f_n|_E \rightarrow f$  in  $L^\infty(E)$ ;
- (2) Sia  $f_n|_E \in L^\infty(E)$  per ogni  $n$  e sia  $f \in L^\infty(E)$ . Se  $f_n|_E \rightarrow f$  in  $L^\infty(E)$ , allora  $f_n$  converge uniformemente in  $E$  a  $f$ .

OSSERVAZIONE 4.4. La convergenza uniforme in  $E$  è più generale di quella in  $L^\infty(E)$ . Per esempio, consideriamo la successione  $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) definita come segue

$$f_n(x) := \frac{1}{x} + \frac{1}{n}, \quad x \in (0, 1)$$

e sia  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) := \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1).$$

Allora  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  in  $(0, 1)$ , ma  $f, f_n \notin L^\infty((0, 1))$ .

PROPOSIZIONE 4.3 (\*). Sia  $W$  un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio di Banach  $(V, \|\cdot\|)$ . Allora  $(W, \|\cdot\|)$  è uno spazio di Banach.

TEOREMA 4.2 (\*\*). Sia  $E \subset \mathbb{R}$ . Allora:

- (1)  $(L^\infty(E), \|\cdot\|_{\infty, E})$  è uno spazio di Banach;



- (2)  $C_b(E) := C(E) \cap L^\infty(E)$  è un sottospazio vettoriale chiuso di  $(L^\infty(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$  e quindi  $(C_b(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$  è uno spazio di Banach. In particolare se  $E$  è compatto, dato che in tal caso  $C_b(E) = C(E)$ , si ha che  $(C(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$  è uno spazio di Banach.

OSSERVAZIONE 4.5. Esistono spazi vettoriali normati non completi (osserviamo che tali spazi non possono avere dimensione finita, in quanto ogni spazio vettoriale normato di dimensione finita è completo). Per esempio, consideriamo l'insieme dei polinomi a coefficienti reali in  $(0, 1/2)$ , cioè

$$\mathcal{P} := \{f|_{(0,1/2)} \mid f \in \mathbb{R}[x]\}.$$

Allora  $\mathcal{P}$  è un sottospazio vettoriale di  $L^\infty((0, 1/2))$ . Consideriamo la successione  $\{f_n\} \subset \mathcal{P}$  con

$$f_n(x) := 1 + x + x^2 + \dots + x^n, \quad x \in (0, 1/2).$$

Osserviamo che (per ogni  $n, k$  con  $n, k > 0$ ):

$$0 < f_{n+k}(x) - f_n(x) = x^{n+1}(1 + x + \dots + x^{k-1}) < x^{n+1} \sum_{i=0}^{+\infty} x^i = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

da cui si ottiene

$$\|f_{n+k} - f_n\|_{\infty, (0,1/2)} \leq \frac{1/2^{n+1}}{1/2} = \frac{1}{2^n}.$$

Ne segue che  $\{f_n\}$  è una successione di Cauchy in  $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\infty, (0,1/2)})$ , quindi anche in  $(L^\infty((0, 1/2)), \|\cdot\|_{\infty, (0,1/2)})$ . Per Teorema 4.2 esiste  $f \in L^\infty((0, 1/2))$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, (0,1/2)} = 0.$$

Ma tale  $f$  può essere calcolata esplicitamente. Infatti essa deve essere anche il limite puntuale delle  $f_n$ , per cui e in effetti sappiamo che

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + x + \dots + x^n) = \frac{1}{1-x}$$

per ogni  $x \in (0, 1/2)$ . Si vede così che  $f \notin \mathcal{P}$ .

Dalla formula di Taylor con resto in forma integrale, otteniamo il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 4.4 (\*). Si considerino  $f \in C^\infty(a, b)$  e  $x_0 \in (a, b)$ , dove  $(a, b)$  è un qualsiasi intervallo limitato di  $\mathbb{R}$ . Si supponga inoltre che esista una costante  $C \geq 0$  tale che

$$\sup_{x \in (a,b)} |f^{(n)}(x)| \leq C^n$$

per  $n$  sufficientemente grande. Allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_{x_0, n} - f\|_{\infty, (a,b)} = 0$ , dove  $T_{x_0, n}$  indica il polinomio di Taylor di grado  $n$  con centro in  $x_0$  (relativo alla funzione  $f$ ), cioè

$$T_{x_0, n}(x) := f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Vale il seguente teorema di passaggio al limite nell'integrale.

PROPOSIZIONE 4.5 (\*). Sia  $\{f_n\}$  una successione convergente a  $f$  in  $(C([a, b]), \|\cdot\|_{\infty, [a, b]})$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

OSSERVAZIONE 4.6. Proposizione 4.5 segue banalmente dal teorema dalla convergenza dominata di Lebesgue (cfr. Teorema 2.7 e Teorema 2.4), osservando prima che, per  $n$  sufficientemente grande, si ha

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} + \|f\|_{\infty, [a, b]} \leq 1 + \|f\|_{\infty, [a, b]}$$

per ogni  $x \in [a, b]$

Come corollario otteniamo anche questo risultato sul passaggio al limite della derivata.

COROLLARIO 4.1 (\*). Sia  $[a, b]$  un intervallo compatto di  $\mathbb{R}$  e consideriamo una successione  $\{f_n\} \subset C^1([a, b])$  tale che:

- (i)  $\{f_n\}$  converge puntualmente in  $[a, b]$ . Sia  $f$  il limite;
- (ii)  $\{f'_n\}$  converge in  $(C([a, b]), \|\cdot\|_{\infty, [a, b]})$ . Sia  $g$  il limite.

Allora  $f \in C^1([a, b])$  e più precisamente si ha  $f' = g$ .

Esempi.

## 2. Serie di funzioni generiche

DEFINIZIONE 4.3. In uno spazio vettoriale normato  $(V, \|\cdot\|)$ , consideriamo una successione  $\{v_j\} \subset V$ . Diremo allora che “la serie dei  $v_j$  converge totalmente (in  $V$ )” se la serie dei  $\|v_j\|$  converge (in  $\mathbb{R}$ ), cioè se  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N \|v_j\| < +\infty$ . Se una serie converge in senso usuale in  $(V, \|\cdot\|)$ , d’ora in poi diremo che essa “converge semplicemente (in  $V$ )” (per enfatizzare la distinzione fra le due nozioni di convergenza).

PROPOSIZIONE 4.6 (\*). Consideriamo uno spazio di Banach  $(V, \|\cdot\|)$  e una successione  $\{v_j\} \subset V$  tale che la serie dei  $v_j$  converge totalmente in  $V$ . Allora tale serie converge anche semplicemente in  $V$ .

OSSERVAZIONE 4.7. In uno spazio vettoriale normato non completo può capitare che una serie converga totalmente ma non semplicemente. Per esempio consideriamo lo spazio vettoriale definito in Osservazione 4.5, cioè  $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\infty, (0, 1/2)})$  con

$$\mathcal{P} := \{f|_{(0, 1/2)} \mid f \in \mathbb{R}[x]\}.$$

e sia  $\{v_j\} \subset \mathcal{P}$  la successione definita da

$$v_j(x) := x^j, \quad x \in (0, 1/2).$$

Allora la serie delle  $v_j$  converge totalmente ma non semplicemente in  $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\infty, (0, 1/2)})$ .

Da Teorema 4.2 e da Proposizione 4.6 seguono subito i seguenti risultati.

**COROLLARIO 4.2** (°). *Sia  $E \subset \mathbb{R}$  e sia  $\{f_j\}$  una successione in  $(L^\infty(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$  tale che la serie delle  $f_j$  converge totalmente in  $L^\infty(E)$ . Allora tale serie converge anche semplicemente in  $L^\infty(E)$ .*

**COROLLARIO 4.3** (°). *Sia  $E \subset \mathbb{R}$  e sia  $\{f_j\}$  una successione in  $(C_b(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$  tale che la serie delle  $f_j$  converge totalmente in  $C_b(E)$ . Allora tale serie converge anche semplicemente in  $C_b(E)$ .*

**COROLLARIO 4.4** (°). *Sia  $E \subset \mathbb{R}$  compatto e sia  $\{f_j\}$  una successione in  $(C(E), \|\cdot\|_{\infty,E})$  tale che la serie delle  $f_j$  converge totalmente in  $C(E)$ . Allora tale serie converge anche semplicemente in  $C(E)$ .*

Da Proposizione 4.5 si ottiene subito il seguente teorema di integrazione per serie.

**COROLLARIO 4.5** (°). *Sia  $[a, b]$  un sottoinsieme compatto di  $\mathbb{R}$  e consideriamo una successione  $\{f_j\} \subset C([a, b])$  tale che la serie delle  $f_j$  converga semplicemente in  $(C([a, b]), \|\cdot\|_{\infty,[a,b]})$ . Allora*

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{+\infty} f_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_a^b f_j.$$

Da Corollario 4.1 segue poi immediatamente il seguente risultato di derivazione per serie.

**COROLLARIO 4.6** (°). *Sia  $[a, b]$  un sottoinsieme compatto di  $\mathbb{R}$  e consideriamo una successione  $\{f_j\} \subset C^1([a, b])$  tale che:*

- (i) *La serie delle  $f_j$  converge puntualmente in  $[a, b]$ . Sia  $F$  il limite;*
- (ii) *La serie delle  $f'_j$  converge semplicemente in  $(C([a, b]), \|\cdot\|_{\infty,[a,b]})$ .*

*Allora  $F \in C^1([a, b])$  e più precisamente si ha*

$$F' = \sum_{j=1}^{+\infty} f'_j.$$

Osserviamo che vale il seguente risultato (cfr. Proposizione 4.4).

**COROLLARIO 4.7** (°). *Si considerino  $f \in C^\infty(a, b)$  e  $x_0 \in (a, b)$ , dove  $(a, b)$  è un qualsiasi intervallo limitato di  $\mathbb{R}$ . Si supponga inoltre che esista una costante  $C \geq 0$  tale che*

$$\sup_{x \in (a,b)} |f^{(n)}(x)| \leq C^n$$

*per  $n$  sufficientemente grande. Allora la serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

converge totalmente in  $L^\infty(a, b)$  (e quindi, come già sappiamo, converge anche semplicemente in  $(L^\infty(a, b), \|\cdot\|_{\infty, (a, b)})$ ).

### 3. Serie di potenze

PROPOSIZIONE 4.7 (\*). Per una serie di potenze

$$(3.1) \quad a_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j x^j \quad (a_j \in \mathbb{R})$$

valgono le seguenti proprietà:

- (1) Se (3.1) converge in un punto  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , allora essa converge totalmente in  $(C([-r, r]), \|\cdot\|_{\infty, [-r, r]})$ , per ogni  $r < |y|$ ;
- (2) L'insieme in cui la serie converge è del tipo  $(-R, R)$ , oppure  $[-R, R)$ , oppure  $(-R, R]$ , oppure  $[-R, R]$ , dove

$$R := \sup\{|y| \mid \text{la serie (3.1) converge in } y\}.$$

Tale numero è detto “raggio di convergenza della serie di potenze (3.1)”;

- (3) Se  $R > 0$ , la funzione

$$x \mapsto a_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j x^j, \quad x \in (-R, R)$$

è continua.

PROPOSIZIONE 4.8 (\*\*). Sia data una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad (a_n \in \mathbb{R})$$

con raggio di convergenza  $R$  e poniamo

$$\rho := \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Allora

$$R = \begin{cases} 0 & \text{se } \rho = +\infty, \\ \frac{1}{\rho} & \text{se } \rho \in (0, +\infty) \\ +\infty & \text{se } \rho = 0. \end{cases}$$

Inoltre, se per  $n$  sufficientemente grande si ha  $a_n \neq 0$  ed esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

allora tale limite coincide con  $\rho$ .

OSSERVAZIONE 4.8. In generale (se  $a_n \neq 0$  definitivamente), non è detto che valga una delle uguaglianze

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho.$$

Un esempio è dato dalla serie

$$x + 2x^2 + x^3 + 4x^4 + x^5 + 6x^6 + \dots$$

per la quale si ha  $\rho = 1$  e

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0.$$

OSSERVAZIONE 4.9. I seguenti esempi mostrano che in effetti, per una serie di potenze, si possono presentare tutti e quattro i casi di insieme di convergenza menzionati nel punto (2) di Proposizione 4.7:

- La serie  $\sum_{j=1}^{+\infty} x^j$  ha raggio di convergenza 1 e insieme di convergenza  $(-1, 1)$ ;
- La serie  $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} x^j$  ha raggio di convergenza 1 e insieme di convergenza  $[-1, 1)$ ;
- La serie  $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j} x^j$  ha raggio di convergenza 1 e insieme di convergenza  $(-1, 1]$ ;
- La serie  $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} x^j$  ha raggio di convergenza 1 e insieme di convergenza  $[-1, 1]$ .

PROPOSIZIONE 4.9 (\*\*). *Le due serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

*hanno lo stesso raggio di convergenza.*

OSSERVAZIONE 4.10. Le due serie di potenze considerate in Proposizione 4.9 possono comportarsi in modo differente negli estremi  $\pm R$  dell'insieme di convergenza. Per esempio gli insiemi di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$$

sono  $[-1, 1)$  e  $(-1, 1)$ , rispettivamente.

Da Corollario 4.6, Proposizione 4.7 e Proposizione 4.9 segue subito il seguente risultato sulla derivazione delle serie di potenze.

PROPOSIZIONE 4.10 (\*\*). *Sia data una serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

*con raggio di convergenza  $R > 0$ . Allora la funzione*

$$x \mapsto S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R, R)$$

appartiene a  $C^\infty((-R, R))$  e (per ogni  $k \geq 1$ ) si ha

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}, \quad x \in (-R, R).$$

Esempi.

## CHAPTER 5

### Complementi

#### 1. Equazioni differenziali ordinarie

Il seguente teorema di punto fisso (di Banach-Caccioppoli) sarà essenziale per provare il successivo teorema di esistenza di soluzioni per il problema di Cauchy.

**TEOREMA 5.1 (\*\*).** *Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach e sia  $K$  un sottoinsieme chiuso di  $X$ . Inoltre sia  $T : K \rightarrow K$  una contrazione, cioè esista  $q < 1$  tale che*

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| \leq q \|x_1 - x_2\|$$

*per ogni  $x_1, x_2 \in K$ . Allora esiste uno e un solo  $\bar{x} \in K$  tale che  $T(\bar{x}) = \bar{x}$ .*

**TEOREMA 5.2 (\*\*).** *Consideriamo un sottoinsieme aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$ ,  $F \in C(A)$  e  $(x_0, y_0) \in A$ . Supponiamo inoltre che  $F$  sia localmente  $y$ -Lipschitziana in  $(x_0, y_0)$ , cioè che esistano  $r_1 > 0$  e  $L > 0$  tali che:*

- (i)  $Q := [x_0 - r_1, x_0 + r_1] \times [y_0 - r_1, y_0 + r_1] \subset A$ ;
- (ii)  $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$  per ogni  $x \in [x_0 - r_1, x_0 + r_1]$  e per ogni  $y_1, y_2 \in [y_0 - r_1, y_0 + r_1]$ .

Allora, posto

$$M := \max_Q |F|$$

e scelto arbitrariamente

$$r_0 < \min \left\{ \frac{r_1}{1 + M}, \frac{1}{L} \right\},$$

esiste una e una sola  $u \in C^1([x_0 - r_0, x_0 + r_0], [y_0 - r_1, y_0 + r_1])$  tale che  $u(x_0) = y_0$  e

$$u'(x) = F(x, u(x))$$

per ogni  $x \in [x_0 - r_0, x_0 + r_0]$ .

**OSSERVAZIONE 5.1.** Consideriamo un sottoinsieme aperto  $A$  di  $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_z^n$ ,  $F \in C(A)$ , poniamo

$$\Phi(x, z) := (z_2, \dots, z_n, F(x, z)), \quad (x, z) \in A$$

e osserviamo che  $\Phi \in C(A, \mathbb{R}^n)$ . Sia inoltre  $(x_0, \eta_1, \dots, \eta_n) \in A$ . Allora il seguente problema di Cauchy per una EDO di ordine  $n$  in forma normale

$$(1.1) \quad \begin{cases} y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \eta_n \end{cases}$$

è equivalente al seguente problema di Cauchy per una EDO vettoriale del primo ordine in forma normale

$$(1.2) \quad \begin{cases} z'(x) = (z_2(x), \dots, z_n(x), F(x, z(x)))^t = \Phi(x, z(x)) \\ z(x_0) = (\eta_1, \dots, \eta_n)^t \end{cases}$$

with  $z(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))^t$ . Con ciò intendiamo che:

- (i) Se  $I$  è un intervallo aperto contenente  $x_0$  e  $y(x) \in C^n(I)$  verifica (1.1), allora  $z(x) := (y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))^t \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  e  $z(x)$  verifica (1.2);
- (ii) Se  $I$  è un intervallo aperto contenente  $x_0$  e  $z(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))^t \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  verifica (1.2), allora  $y(x) := z_1(x) \in C^n(I)$  e  $y(x)$  verifica (1.1).

Nel caso speciale del problema di Cauchy per una EDO lineare di ordine  $n$

$$(1.3) \quad \begin{cases} y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \\ y(x_0) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \eta_n \end{cases}$$

dove le funzioni  $a_i(x)$  e  $b(x)$  sono continue in un intervallo  $(\alpha, \beta)$ , si ha

$$A = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}_z^n, \quad F(x, z) = b(x) - a_0(x)z_1 - \dots - a_{n-1}(x)z_n$$

e

$$\Phi(x, z) = M(x)z + B(x)$$

dove

$$M(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

e

$$B(x) := (0, \dots, 0, b(x))^t.$$

Il sistema equivalente (1.2) diventa dunque

$$\begin{cases} z'(x) = M(x)z(x) + B(x) \\ z(x_0) = (\eta_1, \dots, \eta_n)^t \end{cases}$$

con



Lo stesso argomento che ha consentito di provare Teorema 5.2, permette di provare facilmente il seguente risultato relativo al problema di Cauchy per una EDO vettoriale del primo ordine in forma normale che quindi, grazie ad Osservazione 5.1, fornisce un risultato di esistenza e unicità locale della soluzione per il problema di Cauchy relativo a una EDO di ordine  $n$  in forma normale.

**TEOREMA 5.3** ( $^\circ$ ). *Consideriamo un sottoinsieme aperto  $A$  di  $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_z^n$ ,  $\Phi \in C(A, \mathbb{R}^n)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}_x$  e  $\eta \in \mathbb{R}_z^n$  tali che  $(x_0, \eta) \in A$ . Supponiamo inoltre che  $\Phi$  sia localmente  $z$ -Lipschitziana in  $(x_0, \eta)$ , cioè che esistano  $r_1 > 0$  e  $L > 0$  tali che:*

- (i)  $Q := [x_0 - r_1, x_0 + r_1] \times (\eta + [-r_1, r_1]^n) \subset A$ ;
- (ii)  $|\Phi(x, z_1) - \Phi(x, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|$  per ogni  $x \in [x_0 - r_1, x_0 + r_1]$  e per ogni  $z_1, z_2 \in \eta + [-r_1, r_1]^n$ .

Allora, posto

$$M := \max_Q |\Phi|$$

e scelto arbitrariamente

$$r_0 < \min \left\{ \frac{r_1}{1 + M}, \frac{1}{L} \right\},$$

esiste una e una sola  $u \in C^1([x_0 - r_0, x_0 + r_0], \eta + [-r_1, r_1]^n)$  tale che  $u(x_0) = \eta$  e

$$u'(x) = \Phi(x, u(x))$$

per ogni  $x \in [x_0 - r_0, x_0 + r_0]$ .

**COROLLARIO 5.1** (\*). *Siano  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x), b(x)$  funzioni continue in un intervallo  $(\alpha, \beta)$  e sia  $(x_0, \eta) \in (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$ . Allora esistono due numeri reali  $r_0, r_1 > 0$  tali che  $[x_0 - r_0, x_0 + r_0] \subset (\alpha, \beta)$  e il problema di Cauchy (1.3) ammette una ed una sola soluzione in  $C^n([x_0 - r_0, x_0 + r_0], [\eta_1 - r_1, \eta_1 + r_1])$ .*

**OSSERVAZIONE 5.2.** Osserviamo che se  $A$  è un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_z^n$  e se  $\Phi \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ , allora  $\Phi$  è localmente  $z$ -Lipschitziana in ogni punto di  $A$  (per il teorema del valor medio di Lagrange). Ne segue un risultato di esistenza e unicità locale, per il problema di Cauchy, sotto la sola ipotesi che  $\Phi \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ .

**OSSERVAZIONE 5.3.** Al venir meno dell'ipotesi di Lipschitzianità locale, può venir meno anche l'unicità della soluzione del problema di Cauchy. Per esempio, se consideriamo il caso

$$A := \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) := \frac{3}{2} y^{1/3}, \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$$

si vede subito che per ogni  $a \geq 0$  la funzione

$$u_a(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a, \\ (x - a)^{3/2} & \text{se } x > a \end{cases}$$

è soluzione del problema di Cauchy (la famiglia delle  $u_a$  è nota come "il baffo di Peano").

D'ora in poi considereremo funzioni  $u$  aventi come dominio un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  che sarà denotato con  $I_u$ .

DEFINIZIONE 5.1. *Siano date due funzioni*

$$u : I_u \rightarrow \mathbb{R}, \quad v : I_v \rightarrow \mathbb{R}.$$

Se  $I_u \subset I_v$  e  $v|_{I_u} = u$ , si dice che “ $v$  è un prolungamento di  $u$ ” o che “ $v$  prolunga  $u$ ”. Una soluzione  $u : I_u \rightarrow \mathbb{R}$  di un problema di Cauchy assegnato è detta “massimale” se non esiste un suo prolungamento  $v : I_v \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $I_v \neq I_u$ , che sia soluzione dello stesso problema.

Il seguente risultato precede un teorema di esistenza di soluzioni massimali per il problema di Cauchy.

LEMMA 5.1 (\*). *Siano dati un sottoinsieme aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$ ,  $F \in C(A)$  e supponiamo che  $F$  sia localmente  $y$ -Lipschitziana in ogni punto di  $A$ . Se  $(x_0, y_0) \in A$ , consideriamo due soluzioni*

$$u : I_u \rightarrow \mathbb{R}, \quad v : I_v \rightarrow \mathbb{R}$$

del problema di Cauchy

$$(1.4) \quad \begin{cases} y'(x) = F(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Allora si ha  $v|_{I_u \cap I_v} = u|_{I_u \cap I_v}$ .

TEOREMA 5.4 (\*\*). *Siano dati un sottoinsieme aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$ ,  $F \in C(A)$  e supponiamo che  $F$  sia localmente  $y$ -Lipschitziana in ogni punto di  $A$ . Se  $(x_0, y_0) \in A$  allora esiste una e una sola soluzione massimale del problema di Cauchy (1.4). Essa prolunga qualsiasi soluzione  $u : I_u \rightarrow \mathbb{R}$  di (1.4).*

Valgono inoltre i seguenti due risultati che enunciamo soltanto (per le dimostrazioni si veda per esempio il Cap. 4 di [13]).

TEOREMA 5.5. *Siano dati un sottoinsieme aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$ ,  $F \in C(A)$  e supponiamo che  $F$  sia localmente  $y$ -Lipschitziana in ogni punto di  $A$ . Se  $(x_0, y_0) \in A$ , consideriamo la soluzione massimale*

$$\bar{u} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

del problema di Cauchy (1.4). Allora per ogni sottoinsieme compatto  $K$  di  $A$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $(t, \bar{u}(t)) \in A \setminus K$  ogni volta che  $t \in (a, a + \varepsilon) \cup (b - \varepsilon, b)$ .

TEOREMA 5.6. *Sia  $A := (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$  e consideriamo  $F \in C(A)$  tale che:*

- (i)  $F$  è localmente  $y$ -Lipschitziana in ogni punto di  $A$ ;
- (ii) Esiste una costante  $C$  per cui vale

$$|F(x, y)| \leq C(1 + |y|)$$

per ogni  $(x, y) \in A$ .

Inoltre, se  $(x_0, y_0) \in A$ , sia  $\bar{u} : I_{\bar{u}} \rightarrow \mathbb{R}$  la soluzione massimale del problema di Cauchy (1.4). Allora  $I_{\bar{u}} = (\alpha, \beta)$ .

Infine, è facile dedurre da Teorema 5.6 la seguente generalizzazione.

**TEOREMA 5.7.** Sia  $A := (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$  e consideriamo  $F \in C(A)$  tale che:

- (i)  $F$  è localmente  $y$ -Lipschitziana in ogni punto di  $A$ ;
- (ii) Per ogni  $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$  tali che  $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$  esiste una costante  $C_{\alpha', \beta'}$  per cui vale

$$|F(x, y)| \leq C_{\alpha', \beta'}(1 + |y|)$$

per ogni  $(x, y) \in (\alpha', \beta') \times \mathbb{R}$ .

Allora, se  $(x_0, y_0) \in A$ , la soluzione massimale del problema di Cauchy (1.4) ha come dominio  $(\alpha, \beta)$ .

**OSSERVAZIONE 5.4.** Come abbiamo già visto nel caso del teorema di esistenza e unicità locale delle soluzioni per il problema di Cauchy, anche Teorema 5.4, Teorema 5.5, Teorema 5.6 e Teorema 5.7 (che riguardano l'equazione scalare) si generalizzano banalmente al caso del sistema differenziale del primo ordine.

**OSSERVAZIONE 5.5.** Dati

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b \in C((\alpha, \beta)), \quad x_0 \in (\alpha, \beta), \quad \eta \in \mathbb{R}^n$$

consideriamo il problema di Cauchy (1.1) per una EDO lineare di ordine  $n$ , cioè

$$(1.5) \quad \begin{cases} y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \\ (y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0))^t = \eta. \end{cases}$$

Come abbiamo già evidenziato in Osservazione 5.1, il problema (1.5) è equivalente al problema di Cauchy:

$$(1.6) \quad \begin{cases} z'(x) = \Phi(x, z(x)) \\ z(x) = \eta \end{cases}$$

con  $z(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))^t$  e

$$\Phi(x, z) := M(x)z + B(x), \quad (x, z) \in A := (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$$

dove

$$M(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

e

$$B(x) := (0, \dots, 0, b(x))^t.$$

Ricordiamo che la funzione  $\Phi$  è localmente  $z$ -Lipschitziana in ogni punto di  $A$ . Inoltre, osserviamo che se  $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$  sono tali che  $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$  e poniamo

$$C_{\alpha', \beta'} := \max_{x \in [\alpha', \beta']} \|M(x)\| + \max_{x \in [\alpha', \beta']} |B(x)|$$

allora

$$|\Phi(x, z)| \leq C_{\alpha', \beta'}(1 + |z|)$$

per ogni  $(x, z) \in (\alpha', \beta') \times \mathbb{R}^n$ . Notiamo che (data la forma esplicita della matrice  $M$ ) si ha

$$\|M\|^2 = n - 1 + \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|^2.$$

Possiamo ora applicare Teorema 5.7 e ottenere subito il seguente risultato relativo al problema (1.5).

**TEOREMA 5.8** ( $^\circ$ ). *Se  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  e  $\eta \in \mathbb{R}^n$ , allora esiste una e una sola  $u \in C^n((\alpha, \beta))$  che risolve il problema (1.5).*

## 2. Potenziale di un campo vettoriale

Cominciamo col dare alcune definizioni.

**DEFINIZIONE 5.2.** *Sia  $E$  sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  e consideriamo un campo di vettori  $F : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Allora chiameremo “potenziale di  $F$  (in  $E$ )” ogni funzione  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  tale che, per ogni  $x \in E$ ,  $\varphi$  sia differenziabile in  $x$  e valga  $\nabla\varphi(x) = F(x)$ .*

**OSSERVAZIONE 5.6.** Da un potenziale di  $F$  se ne possono ottenere infiniti altri. Infatti, indicato con  $\varphi$  il potenziale dato e con  $E_j$  ( $j = 1, \dots$ ) le componenti connesse di  $E$ , allora ogni funzione così definita

$$(2.1) \quad \psi(x) := \varphi(x) + c_j, \quad \text{se } x \in E_j$$

( $c_j \in \mathbb{R}$ ) è un potenziale di  $F$ . Anzi, si dimostra facilmente il viceversa e cioè che ogni potenziale di  $F$  è della forma (2.1).

**DEFINIZIONE 5.3.** *Sia  $E$  sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Si dice che:*

- (i) *Un campo  $F \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$  soddisfa la “condizione delle derivate incrociate (CDI)” se vale l’uguaglianza*

$$D_i F_j(x) = D_j F_i(x)$$

*per ogni  $x \in E$  e per ogni  $i, j = 1, \dots, n$ ;*

- (ii) *Un campo  $F \in C(E, \mathbb{R}^n)$  è “conservativo” se*

$$\int_{\overline{C}} F = 0$$

*per ogni curva regolare a tratti orientata connessa e chiusa  $\overline{C}$  in  $E$ ;*

- (iii) Un campo  $F \in C(E, \mathbb{R}^n)$  soddisfa la “condizione dell’indipendenza dal percorso (CIP)” se per ogni coppia  $\overline{C}_1, \overline{C}_2$  di curve regolari a tratti orientate e connesse in  $E$ , aventi lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale, si ha

$$\int_{\overline{C}_1} F = \int_{\overline{C}_2} F.$$

Vale il seguente risultato

PROPOSIZIONE 5.1 (\*). Sia  $E$  sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Si consideri un campo  $F \in C(E, \mathbb{R}^n)$  e si supponga che esista un potenziale  $\varphi$  di  $F$ . Valgono i seguenti fatti:

- (1) Se  $\overline{C}$  è una curva regolare a tratti orientata connessa in  $E$ , allora si ha

$$\int_{\overline{C}} F = \varphi(Q) - \varphi(P)$$

dove  $P$  e  $Q$  sono, rispettivamente, il punto iniziale e il punto finale di  $\overline{C}$ . In particolare  $F$  soddisfa la CIP ed è conservativo;

- (2) Se  $F$  è di classe  $C^1$  allora esso soddisfa la CDI.

OSSERVAZIONE 5.7. L’ esistenza di un potenziale è una condizione molto restrittiva per il campo, come si intuisce anche dal fatto appena provato che il campo (se è di classe  $C^1$ ) deve soddisfare la CDI. Per questo motivo è facilissimo produrre esempi di campi non conservativi, e.g. il campo  $F(x, y) := (0, x)$  in  $\mathbb{R}^2$ .

OSSERVAZIONE 5.8. Il fatto che  $F : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  sia di classe  $C^1$  e soddisfi la CDI non è sufficiente, in generale, a garantire l’esistenza di un potenziale. Lo capiremo subito attraverso un esempio che riusciremo presto ad interpretare come “rivelatore particolare” di un fenomeno generale. Sia  $F$  il campo così definito

$$E := \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0), \quad F(x, y) := \frac{R(x, y)}{\|(x, y)\|^2} = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

che soddisfa CDI, come si verifica facendo il conto. Mostriamo ora come supporre l’esistenza di un potenziale di  $F$  conduca ad una contraddizione. Infatti, se  $\overline{C}$  indica la circonferenza unitaria centrata on  $(0, 0)$  allora

$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

è una parametrizzazione di  $\overline{C}$  e si ha

$$\int_{\overline{C}} F = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

D’altra parte, se esistesse un potenziale  $\varphi$  di  $F$ , allora  $F$  dovrebbe essere conservativo e quindi si avrebbe

$$\int_{\overline{C}} F = 0$$

per (2) in Proposizione 5.1. Da questa contraddizione segue che  $F$  non ha potenziale.

Proviamo il seguente semplice fatto.

PROPOSIZIONE 5.2 (\*). *Sia  $E$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $F \in C(E, \mathbb{R}^n)$ . Allora  $F$  è conservativo se e solo se  $F$  soddisfa la CIP.*

La seguente proposizione (ben nota) ci servirà per provare il risultato successivo e cioè che ogni campo conservativo ha potenziale.

PROPOSIZIONE 5.3. *Sia  $E$  un sottoinsieme aperto connesso di  $\mathbb{R}^n$ . Allora considerata una qualsiasi coppia di punti  $P, Q \in E$  esiste una curva regolare a tratti orientata e connessa in  $E$  avente  $P$  come punto iniziale e  $Q$  come punto finale.*

PROPOSIZIONE 5.4 (\*\*). *Sia  $E$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia dato un campo  $F \in C(E, \mathbb{R}^n)$  soddisfacente CIP. Allora  $F$  ha un potenziale. Più precisamente siano  $E_j$  ( $j = 1, \dots$ ) le componenti connesse di  $E$ , si consideri  $P_j \in E_j$  e si ponga*

$$\varphi(P) := \int_{\bar{C}} F \quad (\text{se } P \in E_j)$$

dove  $\bar{C}$  è una qualsiasi curva regolare a tratti orientata e connessa in  $E_j$  avente  $P_j$  come punto iniziale e  $P$  come punto finale. Allora  $\varphi$  è un potenziale di  $F$  (quello che si annulla nei  $P_j$ ).

Nota bene: una siffatta  $\bar{C}$  esiste, quale che sia  $P$ , grazie a Proposizione 5.3. Inoltre l'integrale non dipende dalla scelta di  $\bar{C}$ , per Proposizione 5.2. La funzione  $\varphi$  risulta pertanto ben definita.

La seguente definizione ci servirà per formulare ipotesi sotto le quali un campo soddisfacente CDI è conservativo.

DEFINIZIONE 5.4. *L'insieme  $E$  si dice "stellato" se esiste  $x_0 \in E$ , detto "centro di  $E$ ", tale che il segmento  $[x_0; x]$  è contenuto in  $E$  per ogni  $x \in E$ .*

OSSERVAZIONE 5.9. Valgono i seguenti fatti.

- Se  $E$  è un aperto stellato allora  $E$  è connesso; in generale il viceversa è falso. Per esempio gli insiemi aperti

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

sono connessi e non stellati;

- Se  $E$  è convesso, allora  $E$  è stellato e ogni suo punto è un centro di  $E$ ;
- Si prova, e si intuisce facilmente, che se  $E$  è stellato allora  $E$  è semplicemente connesso; in generale non è vero il viceversa. Per esempio, l'aperto connesso e non stellato  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  è semplicemente connesso.

PROPOSIZIONE 5.5 (\*\*). *Sia  $E$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  e supponiamo che ogni componente connessa  $E_j$  di  $E$  sia un insieme stellato. Inoltre sia dato  $F \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$  soddisfacente la CDI. Allora  $F$  ha potenziale. Più precisamente, se  $P_j$  indica un centro di  $E_j$ , il potenziale che si annulla nei  $P_j$  è dato da*

$$\varphi(P) := \int_{[P_j; P]} F \quad (\text{se } P \in E_j)$$

dove  $[P_j; P]$  è il segmento orientato avente  $P_j$  come punto iniziale e  $P$  come punto finale.





## Bibliography

- [1] H. Brezis: *Analisi funzionale, teoria e applicazioni*. Liguori Editore 1986.
- [2] L. Carleson: On convergence and growth of partial sums of Fourier series. *Acta Math.* **116**, 135-157 (1966).
- [3] L.C. Evans, R.F. Gariepy: *Lecture Notes on Measure Theory and Fine Properties of Functions*. (Studies in Advanced Math.) CRC Press 1992.
- [4] K.J. Falconer: *The geometry of fractal sets*. (Cambridge Tracts in Math. 85.) Cambridge University Press 1985.
- [5] R.F. Gariepy, W.P. Ziemer: *Modern real analysis*. PSW Publishing Company 1995.
- [6] M. Giaquinta, G. Modica: *Analisi Matematica 3; strutture lineari e metriche, continuità*. Pitagora Ed. Bologna 2000.
- [7] M. Giaquinta, G. Modica: *Analisi Matematica 4; funzioni di più variabili*. Pitagora Ed. Bologna 2005.
- [8] M. Giaquinta, G. Modica: *Analisi Matematica 5; funzioni di più variabili (ulteriori sviluppi)*. Pitagora Ed. Bologna 2005.
- [9] E. Giusti: *Analisi matematica 2*. Bollati Boringhieri 2003.
- [10] E. Giusti: *Esercizi e complementi di analisi matematica, volume secondo*. Bollati Boringhieri 2000.
- [11] S.G. Krantz, H.R. Parks: *The geometry of domains in space*. Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser 1999.
- [12] P. Mattila: *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*. Cambridge University Press 1995.
- [13] C.D. Pagani, S. Salsa: *Analisi matematica 2*. Zanichelli 2016.
- [14] H.L. Royden: *Real Analysis*. Prentice Hall College 1988.
- [15] W. Rudin: *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill 1976.
- [16] S.M. Srivastava: *A course on Borel sets*. Graduate Texts in Mathematics 180, Springer Verlag 1998.
- [17] E.M. Stein, R. Shakarchi: *Real analysis (measure theory, integration and Hilbert spaces)*. Princeton Lectures in Analysis III, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2005.
- [18] <http://en.wikipedia.org/wiki/Stone-Weierstrass>