Il prodotto di misure esterne di Lebesgue è ancora una misura di Lebesgue ($\mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{m+n}$)

A lezione abbiamo provato che:

(1) $\mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^n \leq \mathcal{L}^{m+n}$ (facile);
(2) Se $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$ e $\mathcal{L}^{m+n}(E) < +\infty$, allora $\mathcal{L}^{m+n}(E) \leq (\mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^n)(E)$.

Vediamo una dimostrazione della seconda disuguaglianza, senza restrizioni.

Proposizione. $\mathcal{L}^{m+n} \leq \mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^n$**.**

Proof. Sia E un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}^{m+n}$ e proviamo che

$$\mathcal{L}^{m+n}(E) \leq (\mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^n)(E).$$

Naturalmente possiamo supporre che valgano entrambe le seguenti

$$0 < \mathcal{L}^{m+n}(E), \quad (\mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^n)(E) < +\infty$$

perché se almeno una delle due non si verificasse la tesi diventerebbe banale. Allora, fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, possiamo trovare $\{A_j \times B_j\}_j \in \mathcal{R}(E)$ tale che

$$\sum_j \mathcal{L}^m(A_j)\mathcal{L}^n(B_j) < (\mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^n)(E) + \varepsilon.$$

Naturalmente, possiamo supporre che si abbia

$$\mathcal{L}^m(A_j), \mathcal{L}^n(B_j) \in (0, +\infty) \qquad \text{(per ogni } j\text{)}.$$

Anzi, poiché tutti gli A_j, B_j sono misurabili, possiamo supporre (operando suddivisioni finite, se serve) che si abbia

$$\mathcal{L}^m(A_j), \mathcal{L}^n(B_j) \in (0, 1) \qquad \text{(per ogni } j\text{)}.$$

Per la definizione di misura di Lebesgue, per ogni j devono esistere due famiglie numerabili di intervalli aperti

$$\{I_h^{(j)}\}_h \subset 2^{\mathbb{R}^m}, \quad \{J_k^{(j)}\}_k \subset 2^{\mathbb{R}^n}$$

tali che

$$\sum_h v_m(I_h^{(j)}) < \mathcal{L}^m(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad \sum_k v_n(J_k^{(j)}) < \mathcal{L}^n(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Ne segue che

$$\sum_{j,h,k} \underbrace{v_m(I_h^{(j)})v_n(J_k^{(j)})}_{=v_{m+n}(I_h^{(j)} \times J_k^{(j)})} \leq \underbrace{\sum_j \mathcal{L}^m(A_j)\mathcal{L}^n(B_j)}_{(\mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^n)(E)+\varepsilon} + \sum_j \underbrace{(\mathcal{L}^m(A_j) + \mathcal{L}^n(B_j))}_{<2} \frac{\varepsilon}{2^j} + \sum_j \underbrace{\frac{\varepsilon^2}{4^j}}_{<\varepsilon^2/2^j}$$

e quindi

$$\sum_{j,h,k} v_{m+n}(I_h^{(j)} \times J_k^{(j)}) \leq (\mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^n)(E) + 3\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Poiché $\{I_h^{(j)} \times J_k^{(j)}\}_{j,h,k}$ è una famiglia numerabile di intervalli che ricopre E, si ha anche

$$\mathcal{L}^{m+n}(E) \leq \sum_{j,h,k} v_{m+n}(I_h^{(j)} \times J_k^{(j)}).$$

Otteniamo perciò

$$\mathcal{L}^{m+n}(E) \leq (\mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^n)(E) + 3\varepsilon + \varepsilon^2$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e quindi, facendo tendere ε a 0, la conclusione. $\square$