La cinematica degli urti

Giuseppe Dalba

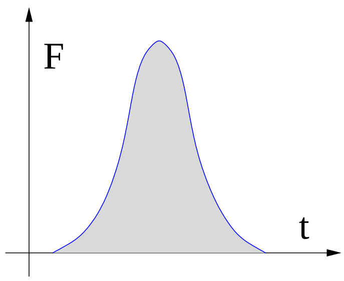
Sommario

Questa raccolta di appunti riguarda la cinematica di tutti quei fenomeni che si possono classificare nella categoria degli "urti". Saranno analizzati gli urti completamente elastici, completamente anelastici ed i casi intermedi, in una, due o tre dimensioni. Nessun particolare modello di forza (una dinamica) è preso in considerazione.

Indice

1 Urti

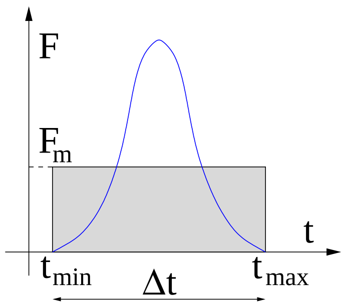
Due corpi che vengono a contatto ed interagiscono fortemente per un breve intervallo di tempo si dice che *urtano* o subiscono una *collisione*. Durante una collisione, sui sistemi interessati agiscono sia forze di contatto che non; le seconde sono in genere trascurabili rispetto alle prime. Una buona approssimazione delle forze agenti durante un urto è quindi quella che contempla solo le forze di contatto (*approssimazione di impulso*): la loro azione è in genere concentrata in un piccolo lasso di tempo Δt, motivo per cui prendono il nome di *forze impulsive* (vedere figura).



Esistono anche urti in cui cambia il numero o la natura dei sistemi interagenti. Per esempio, una reazione è un urto in cui la natura chimico-fisica dei corpi viene mutata, come in: $n + {}^3H_2 \rightarrow {}^2H + {}^2H$. Nel seguito chiameremo genericamente "corpi" i sistemi che interagiscono durante l'urto; il termine "sistema" sarà riservato all'insieme dei due corpi.

I dettagli di un urto sono determinati dalla particolare forma delle forze impulsive in gioco, ma alcune quantità cinematiche sono comunque fissate dalle leggi di conservazione; la cinematica degli urti si occupa di determinare le relazioni fra le quantità di moto dei corpi prima e dopo l'urto. La forza impulsiva agisce in un lasso di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ (nel seguito i pedici $_i$ ed $_f$ indicheranno sempre le quantità iniziali e finali). L'integrale della forza in questo lasso di tempo (l'area sotto la curva nella figura precedente) si chiama impulso $\vec{I}$:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt$$



Poichè la forza è la derivata rispetto al tempo della quantità di moto, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, allora l'impulso $\vec{I}$ è pari alla variazione della quantità di moto del corpo su cui agisce:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot dt = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

La versione differenziale della relazione precedente si ottiene considerando un piccolissimo intervallo di tempo $dt \ll \Delta t$ durante il quale pure la forza impulsiva si può considerare costante: $d\vec{I} = \vec{F} \cdot dt = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot dt = d\vec{p}$.

Si definisce *forza media* il valore medio di $\vec{I}$ sul tempo Δt:

$$\vec{F}_m = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt$$

Nella figura precedente quindi l'area sotto il rettangolo e l'area sotto la curva sono uguali. Siccome le forze esterne agenti su di un corpo sono piccole rispetto alla forza media di un urto, e la forza d'urto è una forza interna, la quantità di moto del sistema dei due corpi con buona approssimazione si conserva durante l'urto (questa è una riformulazione dell'approssimazione d'impulso). Nell'intervallo di tempo $[t_i, t_f]$ pure lo spostamento dei corpi può essere trascurato.

Il tempo Δt di durata di un urto si può misurare con metodi elettrici e nel caso di un urto fra corpi rigidi risulta assai breve; ad esempio con sfere di acciaio aventi diametri dell'ordine di 10cm e velocità dell'ordine di 1m/sec sia ha $\Delta t \simeq 1$msec.

1.1 Leggi di conservazione negli urti

Abbiamo già detto che nei problemi d'urto vale la conservazione della quantità di moto del sistema, quindi anche la velocità $\vec{v}_{CM}$ del centro di massa è costante, così come la cosiddetta "energia cinetica del centro di massa":

$$\vec{p}_{CM} = \text{cost.} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_{CM} = \text{cost.} \qquad \Rightarrow \qquad E_{CM} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 = \text{cost.}$$

L'energia del centro di massa non viene dunque modificata dall'urto ma le quantità E^* (energia del sistema vista nel riferimento del centro di massa) ed $E_K = E_{CM} + E^*$ (energia cinetica totale del sistema nel riferimento del laboratorio) possono variare. Gli urti vengono classificati in base alla variazione di E^*: un urto è ***elastico*** se E^* è costante, ***anelastico*** in caso contrario. L'urto si dice infine ***perfettamente anelastico*** se $E_f^* = 0$; in questo caso l'energia del moto relativo va perduta nell'urto ed entrambi i corpi si muovono assieme, con la velocità $\vec{v}_{CM}$ del centro di massa.

Poichè in tutti gli urti l'energia del centro di massa E_{CM} rimane costante, la trattazione matematica del processo d'urto è più conveniente nel sistema di riferimento solidale con il centro di massa. Questo riferimento viene chiamato *riferimento del centro di massa*. Il riferimento del centro di massa torna utile per i calcoli, ma quello nel quale vengono effettivamente svolti gli esperimenti è il *riferimento del laboratorio*. Generalmente la particella bersaglio è ferma nel riferimento del laboratorio. Indicheremo con i pedici $_1$ e $_2$ i due corpi coinvolti nell'urto; poniamo ora qualche convenzione per la notazione (se si aggiunge un apice $'$ si intende che la quantità è considerata dopo l'urto):

Quantità	Riferimento del laboratorio	Riferimento del centro di massa
Quantità di moto	$\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ e $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$	$\vec{q}_1$ e $\vec{q}_2$ e $\vec{Q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = 0$
Velocità	$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{V} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$	$\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{U} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$
Velocità del centro di massa	$\vec{v}_{CM}$	
Masse	m_1, m_2 ed $M = m_1 + m_2$	invarianti
Energie	E_K ed E_{CM}	E^*

Con queste convenzioni l'energia E^* si scrive:

$$E^* = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2$$

Per passare dal riferimento del laboratorio al riferimento del centro di massa saranno utili le seguenti formule:

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\frac{m_2}{M} \\ \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} = -(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\frac{m_1}{M} \end{cases}$$

Nel caso tipico $\vec{v}_2 = 0$, ovvero quando il bersaglio è fermo nel riferimento del laboratorio, le formule precedenti si semplificano in:

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{v}_1 \frac{m_2}{M} \\ \vec{u}_2 = -\vec{v}_1 \frac{m_1}{M} \end{cases}$$

Naturalmente nel riferimento del centro di massa la quantità di moto complessiva è nulla, per cui $\vec{Q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$ è identicamente nullo.

1.2 Urti unidimensionali elastici

Consideriamo il caso di un urto perfettamente elastico ed unidimensionale, ovvero due particelle di massa m_1 ed m_2, con velocità v_1 e v_2 prima dell'urto e v'_1 e v'_2 dopo, nel riferimento del laboratorio. La conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica implicano:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 {v'}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 {v'}_2^2 \end{cases}$$

Sviluppando il sistema e sostituendo la differenza di due quadrati con la formula $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$, otteniamo:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v'_1) = -m_2(v_2 - v'_2) \\ m_1(v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = -m_2(v_2 - v'_2)(v_2 + v'_2) \end{cases} \tag{1}$$

Semplificando nella seconda relazione le quantità che sono uguali secondo la prima relazione, otteniamo quindi che:

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2 \qquad \Rightarrow \qquad v'_2 = v_1 - v_2 + v'_1 \tag{2}$$

Utilizzando la 2 possiamo ridurci ad una sola variabile, eliminando v'_2, per esempio nella prima relazione di 1:

$$m_1(v_1 - v'_1) = -m_2(v_2 - v_1 + v_2 - v'_1)$$
$$\Rightarrow (m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v'_1$$
$$\Rightarrow v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{M}v_1 + \frac{2m_2}{M}v_2$$

Utilizzando poi la relazione 2 otteniamo con passaggi simili anche l'espressione di v'_2. Riassumendo i risultati:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{M}v_1 + \frac{2m_2}{M}v_2 \qquad v'_2 = \frac{2m_1}{M}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{M}v_2$$

Esaminiamo ora alcuni casi particolari derivanti dalle equazioni precedenti. Quando le masse sono uguali i termini $m_1 - m_2$ sono nulli e $\frac{2m_1}{M} = \frac{2m_2}{M} = 1$, per cui le velocità delle particelle si scambiano. Nel caso poi che $v_2 = 0$, la prima particella si ferma e la seconda parte con velocità uguale alla prima:

$$m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v'_1 = v_2 \\ v'_2 = v_1 \end{cases}$$

Se le masse sono diverse e $v_2 = 0$ allora rimangono solo i termini proporzionali a v_1:

$$m_1 \neq m_2 \quad \text{e} \quad v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{M} v_1 \\ v'_2 = \frac{2m_1}{M} v_1 \end{cases}$$

Se la massa del primo corpo è molto maggiore di quella del secondo corpo, $M \sim m_1 \gg m_2$, allora $v'_1 \simeq v_1$ e $v'_2 \simeq 2v_1$. Se siamo nel limite opposto, $m_1 \ll m_2 \sim M$, allora $v'_1 \simeq -v_1$ e $v'_2 \ll v_1$.

Vediamo un'applicazione di queste conclusioni. Nei reattori nucleari i neutroni prodotti dalla fissione si muovono molto velocemente; affinchè possano produrre altre fissioni occorre rallentarli. Nell'ipotesi che i neutroni urtino elasticamente contro i nuclei fermi, i materiali più adatti per rallentarli sono atomi leggeri di massa vicina a quella del neutrone stesso. Quindi, sulla base della conservazione della quantità di moto, i moderatori per neutroni dovrebbero essere costituiti da atomi leggeri.

1.2.1 Riferimento del centro di massa

Le relazioni precedenti per le velocità dei corpi dopo l'urto sono molto più intuitive se viste nel riferimento del centro di massa. Per definizione lì abbiamo:

$$Q = q_1 + q_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_1 = -q_2$$

la stessa relazione vale per q'_1 e q'_2 dopo l'urto. L'energia cinetica calcolata nel centro di massa sarà $E^* = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$. Poichè $q_1 = -q_2$ significa $u_2 = -\frac{m_1}{m_2} u_1$, possiamo scrivere:

$$E^* = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

Analogamente, dopo l'urto:

$$E'^* = \frac{1}{2} m_1 u'^2_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

Eguagliando l'energia cinetica prima e dopo l'urto (siamo nel caso perfettamente elastico) vediamo immediatamente che vale la relazione $u_1^2 = u'^2_1$. Naturalmente questo è vero anche per il secondo corpo, cioè $u_2^2 = u'^2_2$. In termini delle quantità di moto questo significa $q_1 = \pm q'_1$ e $q_2 = \pm q'_2$. Dei due segni, quello positivo corrisponde all'assenza totale di urto, infatti si avrebbe $v_1 = v'_1$. Dunque scegliamo le soluzioni $q_2 = -q'_2$ e $q_1 = -q'_1$.

In un urto elastico unidimensionale quindi, nel riferimento del centro di massa, ogni corpo inverte il proprio moto e si allontana con la velocità e l'energia che aveva prima dell'urto.

1.2.2 Massimo trasferimento di energia

In questa sezione vogliamo calcolare sotto quali condizioni, in un urto perfettamente elastico, si ha il massimo trasferimento di energia fra un proiettile ed un bersaglio fermo ($v_2 = 0$). L'energia cinetica iniziale del proiettile è $E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$, mentre quelle finali di proiettile e bersaglio sono $E'_1 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1$ ed $E'_2 = \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$. La variazione percentuale dell'energia iniziale è:

$$\eta = \frac{E_1 - E'_1}{E_1} = 1 - \frac{E'_1}{E_1} = 1 - \frac{v'^2_1}{v_1^2}$$

Siccome l'urto è elastico, la quantità di energia persa dal primo corpo è quella guadagnata dal secondo. Quindi il massimo trasferimento di energia si ottiene per il massimo valore di η. Ricordando l'espressione $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{M} v_1$, valida nel caso $v_2 = 0$, otteniamo:

$$\eta = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{M} \right)^2 = \frac{4 m_1 m_2}{M^2}$$

Deriviamo η rispetto alla massa del proiettile per cercarne il valore massimo:

$$\frac{d\eta}{dm_1} = \frac{d}{dm_1} \left(\frac{4 m_1 m_2}{M^2} \right) = \frac{4 m_2^2 - 4 m_1 m_2}{M^3} = 4 m_2 \frac{m_2 - m_1}{M^3}$$

Imponendo la derivata uguale a zero scopriamo che il massimo trasferimento di energia si ha quando le due masse m_1 ed m_2 sono uguali:

$$\frac{d\eta}{dm_1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 4 m_2 \frac{m_2 - m_1}{M^3} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m_1 = m_2$$

1.3 Urti unidimensionali anelastici

Nel caso di urto perfettamente anelastico, nel riferimento del centro di massa i due corpi sono fermi e risulta $E_K = E_{CM}$. L'unica legge di conservazione che rimane è quella della quantità di moto: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = M v_{CM}$ (infatti, tutte le velocità dopo l'urto sono uguali, $v'_1 = v'_2 = v_{CM}$). Consideriamo il caso di bersaglio fermo, $v_2 = 0$:

$$m_1 v_1 = M v'_1 \qquad \Rightarrow \qquad v'_1 = \frac{m_1}{M} v_1 = v_{CM}$$

In un urto anelastico l'energia cinetica totale E_K cambia; questo fenomeno può per esempio essere utilizzato per determinare la velocità di un proiettile note la sua massa e quella del bersaglio fermo. Calcoliamo la variazione assoluta e relativa di energia cinetica:

$$E_K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \qquad E'_K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{M} v_1^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_K = E'_K - E_K = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{M} v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = -E_K \frac{m_2}{M}$$

$$\Rightarrow \quad \eta = -\frac{E'_K - E_K}{E_K} = \frac{m_2}{M}$$

1.3.1 Bersagli fissi e mobili

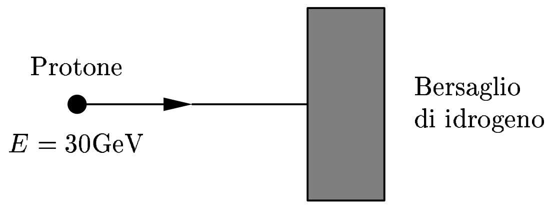
Supponiamo ora che l'urto sia perfettamente anelastico, ovvero che le due particelle si muovano assieme dopo l'urto. Supponiamo anche che il bersaglio sia inizialmente fermo ($v_2 = 0$). La quantità di moto del sistema prima dell'urto è $m_1 v_1$. Dopo l'urto è $M v_{CM}$. Siccome essa è una quantità conservata, otteniamo $m_1 v_1 = M v_{CM}$, quindi il sistema si muove con velocità $v'_1 = v'_2 = v_{CM} = \frac{m_1}{M} v_1$. Il centro di massa porta con sè dell'energia che sarebbe utile ai fini della collisione. L'energia sottratta all'urto è l'energia del centro di massa:

$$\frac{1}{2} M v_{CM}^2 = \frac{1}{2} M \frac{m_1^2}{M^2} v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{M} v_1^2$$

Se $m_1 \ll m_2$, ovvero se la massa del proiettile è piccola rispetto a quella del bersaglio, questa perdita di energia è piccola. Nel caso invece in cui $m_1 \sim m_2$ l'energia sottratta è:

$$\frac{1}{2} \frac{m_1^2}{2 m_1} v_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right)$$

Questo risultato significa che metà dell'energia totale viene persa in energia del centro di massa. Nel caso infine in cui $m_1 \gg m_2$ l'energia viene persa quasi completamente. Vediamo il caso di una collisione di protoni contro un bersaglio di idrogeno (un atomo di idrogeno è sostanzialmente un protone singolo, perchè l'elettrone ha una massa trascurabile rispetto ad esso):



La massa a riposo m_0 del protone corrisponde ad una energia di 930MeV. Se il protone viene lanciato ad una velocità corrispondente ad una energia di 30GeV, per la relatività ristretta si ottiene una massa inerziale $m \simeq 30m_0$. L'inerzia dei protoni del fascio è dunque molto maggiore di quella dei protoni del bersaglio ed una gran parte di energia delle particelle del fascio viene sprecata nello spostamento delle particelle del bersaglio.

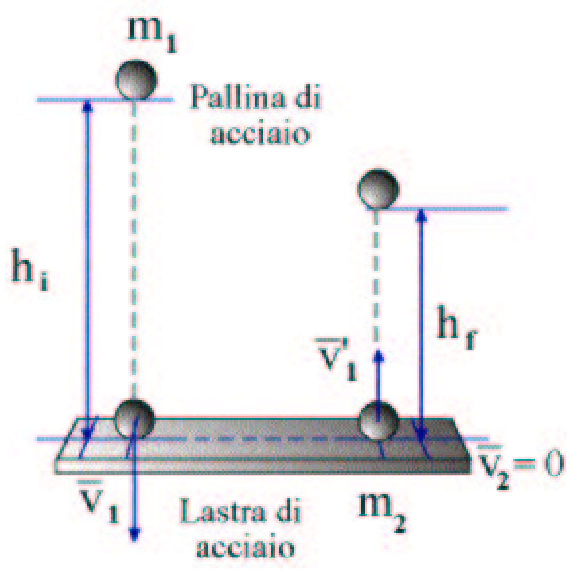
L'energia utile per produrre reazioni nucleari è solo quella disponibile nel centro di massa; sempre dalle formula della relatività speciale si ritrova che essa vale $Q = \sqrt{2m_0c^2E}$, dove E è l'energia del fascio di protoni prima dell'urto (nel riferimento del laboratorio). Con i valori precedentemente introdotti otteniamo $Q = 7.4\text{GeV}$. Si paga quindi 30 per ottenere 7.4! E dire che il costo degli acceleratori risulta almeno proporzionale all'energia del fascio!

Per questo motivo gli esperimenti di alte energie preferiscono una configurazione "fascio contro fascio". Per esempio, nell'anello di accumulazione "Adone" due fasci di particelle (elettroni e positroni) sono lanciati l'uno contro l'altro, ogni fascio avendo una energia pari a $E = 1.5\text{GeV}$. L'energia utile nella collisione risulta essere $Q = 2E = 3\text{GeV}$.

Si noti che per avere un valore $Q = 3\text{GeV}$ da un esperimento a bersaglio fisso, in cui un fascio di elettroni va a colpire altri elettroni in un bersaglio stazionario si dovrebbe avere un energia pari a 9000GeV !!

1.3.2 Coefficiente di restituzione

In generale gli urti fra corpi macroscopici non sono né perfettamente elastici, né perfettamente anelastici. Consideriamo un urto genericamente anelastico fra un proiettile ed un bersaglio di massa molto grande; il bersaglio rimarrà sostanzialmente fermo dopo l'urto ($v_2 = v'_2 = 0$) ed il proiettile verrà respinto all'indietro (v_1 e v'_1 avranno segno diverso). Definiamo il coefficiente di restituzione e come quel numero tale che $v'_1 = -ev_1$. La misura di questo coefficiente si può effettuare sperimentalmente come illustrato nella prossima figura:



$$\begin{cases} v_1^2 = 2gh_i \\ v'^2_1 = 2gh_f \end{cases} \qquad \text{ma} \qquad v'^2_1 = e^2 v_1^2 \qquad \text{e quindi} \qquad 2gh_f = e^2 2gh_1 \qquad \text{da cui} \qquad e = \sqrt{\frac{h_f}{h_i}}$$

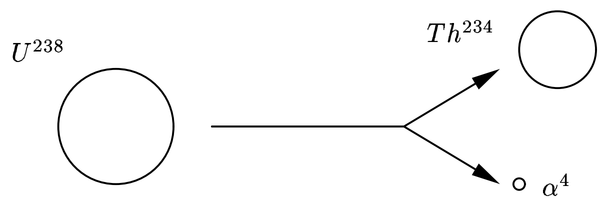
1.3.3 Esempio - disintegrazione nucleare

Consideriamo in questa sezione un urto anelastico, ma non perfettamente anelastico. Per definizione l'energia cinetica totale non si conserva. Siccome l'energia totale del sistema si conserva sempre (1^{O} principio della termodinamica) parte dell'energia cinetica deve convertirsi in qualche altra forma. Detta K questa parte possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1{v'}_1^2+\frac{1}{2}m_2{v'}_2^2+K$$

Se $K>0$, una frazione di energia cinetica viene perduta nell'urto, generalmente sotto forma di onde sonore, elettromagnetiche o di calore. Se $K<0$, una frazione di energia interna al sistema viene convertita in energia cinetica del sistema stesso. Questi urti sono detti talvolta *superelastici*. Essi sono importanti in fisica atomica e in fisica nucleare, come nel seguente esempio della disintegrazione nucleare dell'uranio 238:

$$U^{238}\rightarrow\alpha^4+Th^{234}+\Delta E\qquad \text{con } \Delta E=+4.18\text{MeV}$$



Il riferimento in cui l'atomo di uranio è fermo ($E^*=0$) è ovviamente quello del centro di massa. La quantità ΔE è l'energia cinetica dei frammenti dopo l'urto, ovvero E'^*. Abbiamo quindi l'uguaglianza $0=E'^*+K$ da cui $K=-E'^*=-4.18\text{MeV}<0$, cioè la disintegrazione è una specie di "urto" superelastico; l'energia addizionale era l'energia di legame fra le due parti che costituivano l'U^{238} prima della disintegrazione.

Siccome qui abbiamo solo due frammenti, le loro quantità di moto sono fissate (in modulo). Svolgeremo i conti nel riferimento del centro di massa, dove le quantità di moto dei frammenti sono indicate come $\vec{q'}_1=\vec{q}_{Th}$ e $\vec{q'}_2=\vec{q}_\alpha$, ed ovviamente vale la relazione $\vec{q'}_1=-\vec{q'}_2$: i due frammenti cioè si allontanano in direzioni opposte lungo la stessa retta. Indichiamo con $p_{Th}=p_\alpha=p$ i moduli di questi vettori:

$$\Delta E=E'^*=\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}+\frac{p_{Th}^2}{2m_{Th}}=p^2\left(\frac{1}{2m_\alpha}+\frac{1}{2m_{Th}}\right)=\frac{p^2}{2\mu}\qquad\Rightarrow\qquad p=\sqrt{2\mu\Delta E}$$

Abbiamo indicato con $\mu=\frac{m_\alpha m_{Th}}{m_\alpha+m_{Th}}$ la cosiddetta massa ridotta dei due frammenti, che in questo caso vale $\mu=3.93$u.m.a. Si possono ricavare immediatamente anche le energie cinetiche dei singoli frammenti e le loro velocità:

$$\begin{cases} {E'}^*_\alpha = \frac{p^2}{2m_\alpha} = \frac{2\mu\Delta E}{2m_\alpha} = \frac{3.93\times4.18}{4} = 4.11\text{ MeV}\\ {E'}^*_{Th} = \frac{p^2}{2m_{Th}} = \frac{2\mu\Delta E}{2m_{Th}} = \frac{3.93\times4.18}{234} = 70\cdot10^{-2}\text{MeV}\end{cases}$$

$$\begin{cases} {u'}_\alpha = \frac{p}{m_\alpha} = \frac{\sqrt{2\mu\Delta E}}{m_\alpha}\\ {u'}_{Th} = \frac{p}{m_{Th}} = \frac{\sqrt{2\mu\Delta E}}{m_{Th}}\end{cases}$$

Considerando che 1u.m.a.$=10^{-27}$Kg$=831$MeV e che 1eV$=1.6\cdot10^{19}$J:

$${u'}_\alpha\simeq4\cdot10^6\text{m/s}\qquad {u'}_{Th}\simeq6.7\cdot10^4\text{m/s}$$

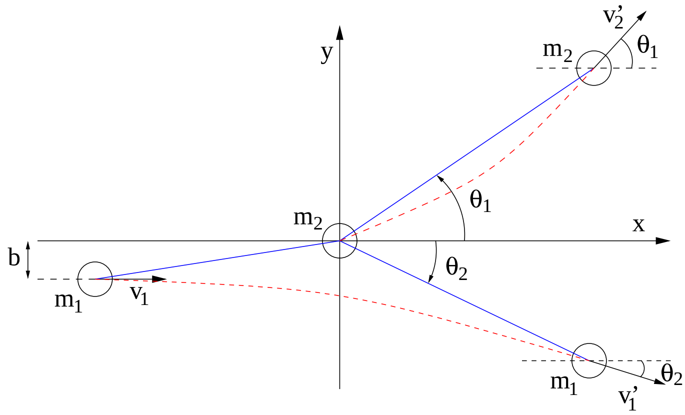
1.4 Urti elastici in due dimensioni

Se l'urto è elastico ma non unidimensionale, le leggi di conservazione non bastano a determinare il moto dei corpi dopo di esso basandosi solo sulla conoscenza del moto prima dell'urto. Infatti le uniche equazioni che possiamo scrivere sono:

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v'}_1 + m_2\vec{v'}_2 \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2 \end{cases}$$

La prima equazione è vettoriale, quindi conta come tante equazioni scalari quante sono le dimensioni del sistema. Nel caso di urto bidimensionale, note le quantità iniziali $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})$ e $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y})$ rimangono le quattro incognite $\vec{v'}_1 = (v'_{1x}, v'_{1y})$ e $\vec{v'}_2 = (v'_{2x}, v'_{2y})$. Si hanno così quattro incognite per tre equazioni scalari. Se non si conosce il tipo di iterazione la quarta informazione necessaria per risolvere il problema la si deve dedurre dall'esperimento. Tipicamente si misura l'angolo di deviazione delle due particelle. Ovviamente, al crescere del numero delle dimensioni servono sempre più quantità misurate.

Consideriamo ora il caso di un urto bidimensionale fra due particelle di cui una è inizialmente ferma. Questo non è affatto un caso restrittivo in quanto si può sempre scegliere un sistema di riferimento rispetto al quale una delle due particelle risulti ferma prima dell'urto.



La distanza b fra la direzione del corpo incidente ed una retta ad essa parallela passante per il corpo fermo viene detta *parametro d'urto*. È una misura di quanto direttamente il proiettile incida sul bersaglio. Per $b = 0$ si ha un urto frontale. Scriviamo per esteso le leggi di conservazione, utilizzando gli angoli θ_1 e θ_2 per determinare le componenti di $\vec{v'}_1$ e $\vec{v'}_2$:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2 \tag{3}$$

$$m_1v_1 = m_1v'_1\cos\theta_1 + m_2v'_2\cos\theta_2 \qquad \text{componente } x \tag{4}$$

$$0 = m_1v'_1\sin\theta_1 - m_2v'_2\sin\theta_2 \qquad \text{componente } y \tag{5}$$

Quindi abbiamo quattro quantità incognite (v'_1, v'_2, θ_1 e θ_2) e tre quantità note (m_1, m_2 e v_1). Come già detto le equazioni indipendenti a disposizione sono solamente tre e serve una ulteriore informazione. Cominciamo con il calcolare l'energia trasferita al secondo corpo; siccome questo era precedentemente fermo essa coincide con E'_2. Come primo passaggio isoliamo $\cos\theta_1$ nell'equazione 4 e quadriamolo:

$$\cos^2\theta_1 = \left(\frac{m_1v_1 - m_2v'_2\cos\theta_2}{m_1v'_1}\right)^2 \tag{6}$$

Dall'equazione 5 possiamo invece ricavare $\sin\theta_1$. Estraiamolo e quadriamolo come prima:

$$\sin^2\theta_1 = \left(\frac{m_2v'_2\sin\theta_2}{m_1v'_1}\right)^2$$

Ora possiamo sostituire $1-\sin^2\theta_1$ al posto di $\cos^2\theta_1$ nella equazione 6 (dove sviluppiamo il secondo membro), e moltiplicare per $m_1^2 {v'}_1^2$ ambo i membri in modo da non avere più frazioni:

$$m_1^2 {v'}_1^2 - m_2^2 {v'}_2^2 \sin^2\theta_2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 {v'}_2^2 \cos^2\theta_2 - 2m_1 m_2 v_1 {v'}_2 \cos\theta_2$$

raccogliamo ora i termini con seni e coseni quadri in θ_2 (questi sommeranno ad uno):

$$m_1^2 {v'}_1^2 - m_2^2 {v'}_2^2 (\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2) = m_1^2 v_1^2 - 2m_1 m_2 v_1 {v'}_2 \cos\theta_2$$

moltiplicando per $\frac{1}{2}$ e dividendo per m_1 si ha:

$$\frac{1}{2} m_1 {v'}_1^2 - \frac{m_2}{m_1}\frac{1}{2} m_2 {v'}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - m_2 v_1 {v'}_2 \cos\theta_2$$

nella precedente equazione si possono riconoscere le espressioni per $E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$, ${E'}_1 = \frac{1}{2} m_1 {v'}_1^2$ ed ${E'}_2 = \frac{1}{2} m_2 {v'}_2^2$. Otteniamo quindi:

$${E'}_1 - \frac{m_2}{m_1} {E'}_2 = E_1 - m_2 v_1 {v'}_2 \cos\theta_2$$

Sostituendo l'equazione di conservazione dell'energia 3, ovvero ponendo $E_1 = {E'}_1 + {E'}_2$, si ottiene:

$${E'}_1 - \frac{m_2}{m_1} {E'}_2 = {E'}_1 + {E'}_2 - m_2 v_1 {v'}_2 \cos\theta_2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{m_2}{m_1} {E'}_2 = {E'}_2 - m_2 v_1 {v'}_2 \cos\theta_2$$

$$\Rightarrow \quad {E'}_2 \frac{M}{m_1} = \frac{1}{2} m_2 {v'}_2^2 \frac{M}{m_1} = m_2 v_1 {v'}_2 \cos\theta_2$$

da cui:

$${v'}_2 = \frac{2m_1}{M} v_1 \cos\theta_2$$

Questo ci permette di ottenere finalmente un'espressione per l'energia ${E'}_2$ ceduta al secondo corpo durante l'urto, come funzione dell'angolo di deviazione del corpo inizialmente fermo rispetto all'asse del "proiettile":

$${E'}_2 = \frac{1}{2} m_2 {v'}_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{4m_1^2}{M^2} v_1^2 \cos^2\theta_2 = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2\right) \frac{4m_1 m_2}{M^2} \cos^2\theta_2 = E_1 \frac{4m_1 m_2}{M^2} \cos^2\theta_2 \qquad (7)$$

1.4.1 Caso di due oggetti di massa uguale

L'espressione 7 per l'energia del secondo corpo dopo l'urto si semplifica notevolmente quando i due corpi hanno una massa uguale (se $m_1 = m_2 = m$ allora $M = m_1 + m_2 = 2m$):

$$m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad {E'}_2 = E_1 \cos^2\theta_2$$

Siccome tutte le equazioni fin qui scritte sono invarianti sotto scambio di θ_1 con θ_2 e di ${v'}_1$ con ${v'}_2$, l'equazione per ${E'}_1$ segue immediatamente. In definitiva si trova che

$$\begin{cases} {E'}_1 &= E_1 \cos^2\theta_1 \\ {E'}_2 &= E_1 \cos^2\theta_2 \end{cases}$$

e sommando membro a membro si ha:

$$E_1 = E_1(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2) \quad \text{che implica} \quad 1 = \cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2$$

che vale solo se $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$, cioè se gli angoli sono complementari.

1.4.2 Caso di due oggetti di massa molto diversa

L'espressione 7 per l'energia del secondo corpo dopo l'urto si semplifica anche quando i due corpi hanno una massa molto diversa fra di loro; supponiamo che valga $m_1 \ll m_2 \simeq M$:

$$E'_2 = E_1 \frac{4m_1 m_2}{M^2} \cos^2\theta_2 \simeq E_1 \frac{4m_1}{m_2} \cos^2\theta_2$$

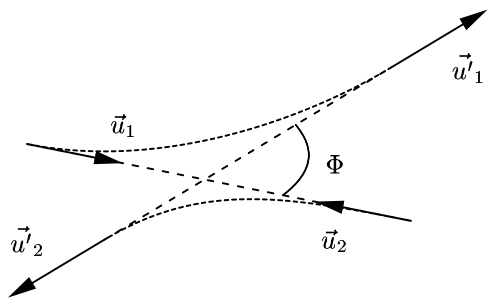
Di nuovo, siccome $E'_2 = E_1 - E'_1$, da questa segue:

$$E'_1 = E_1 - \frac{4m_1}{m_2} E_1 \cos^2\theta_2 = E_1 \left(1 - \frac{4m_1}{m_2}\cos^2\theta_2\right) \simeq E_1$$

Così, quale che sia θ_2, l'oggetto incidente non cede che una parte molto piccola della sua energia cinetica. Nel limite in cui $\frac{m_1}{m_2} = 0$ si ha $E'_2 = 0$ e $E'_1 = E_1$: l'oggetto incidente rimbalza sull'oggetto fermo recuperando tutta la sua energia cinetica. È questo il caso di un urto elastico di una palla su un muro.

1.4.3 Moto nel riferimento del centro di massa

Rivediamo i calcoli per un urto bidimensionale elastico nel riferimento del centro di massa. Ricordiamo che per definizione $m_1\vec{u}_1 - m_2\vec{u}_2 = 0$ ed $m_1\vec{u'}_1 - m_2\vec{u'}_2 = 0$.



Nel riferimento del centro di massa il moto è interamente caratterizzato da un solo parametro addizionale Φ, detto *angolo di scattering*. L'espressione della conservazione dell'energia cinetica è:

$$\frac{1}{2}m_1{u_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{u_2}^2 = \frac{1}{2}m_1{u'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{u'_2}^2$$

Sostituendo $u_2 = \frac{m_1}{m_2}u_1$ e $u'_2 = \frac{m_1}{m_2}u'_1$ (dal bilanciamento della quantità di moto) nell'espressione della energia si trova:

$$\frac{1}{2}m_1{u_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_2}u_1\right)^2 = \frac{1}{2}m_1{u'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_2}u'_1\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}m_1{u_1}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2}{u_1}^2 = \frac{1}{2}m_1{u'_1}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2}{u'_1}^2$$

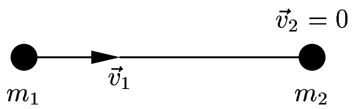
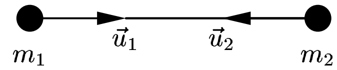
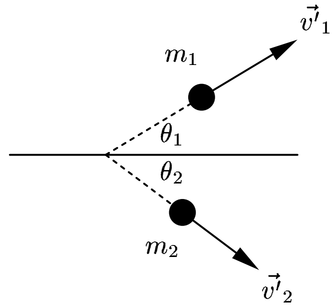
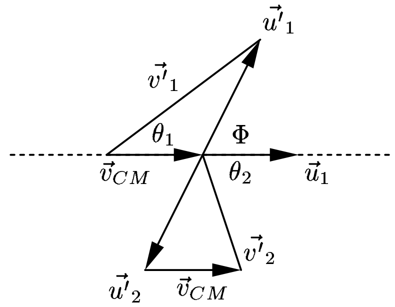
$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}m_1{u_1}^2\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{1}{2}m_1{u'_1}^2\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

Sviluppando rispetto al secondo corpo si ottengono equazioni analoghe. Dopo banali semplificazioni si ottiene quindi:

$$\begin{cases} {u_1}^2 = {u'_1}^2 \\ {u_2}^2 = {u'_2}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = u'_1 \\ u_2 = u'_2 \end{cases}$$

Questo significa che in un urto elastico la velocità di ciascuna particella nel sistema di riferimento del centro di massa è la stessa prima e dopo l'urto.

1.4.4 Urti contro una particella ferma nel sistema di laboratorio

Sistema di laboratorio	Sistema del centro di massa
Prima dell'urto	Prima dell'urto
	
$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1}{M}\vec{v}_1$	$\vec{u}_1 = \frac{m_2}{M}\vec{v}_1 \qquad \vec{u}_2 = -\frac{m_1}{M}\vec{v}_1 = -\vec{v}_{CM}$
Dopo l'urto	Dopo l'urto
	
	$\vec{v}_1 = \vec{v}_{CM} + \vec{u}_1 \qquad \vec{v'}_1 = \vec{v}_{CM} + \vec{u'}_1$
	$0 = \vec{v}_{CM} + \vec{u}_2 \qquad \vec{v'}_2 = \vec{v}_{CM} + \vec{u'}_2$

L'angolo di scattering Φ nel centro di massa non ha limitazioni mentre gli angoli θ_1 e θ_2 nel sistema di laboratorio subiscono restrizioni a causa delle leggi di conservazione. Consideriamo il diagramma relativo all'urto nel centro di massa:

$$\tan\theta_1 = \frac{u_1' \sin\Phi}{v_{CM} + u_1' \cos\Phi}$$

Poichè l'urto è elastico $u_1' = u_1$ quindi, dividendo per u_1 otteniamo:

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\Phi}{\frac{v_{CM}}{u_1} + \cos\Phi}$$

Considerando che $u_1 = \frac{m_2}{M}v_1$ e che $v_{CM} = \frac{m_1}{M}v_1$ si ha:

$$\frac{v_{CM}}{u_1} = \frac{m_1}{m_2}$$

da cui:

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\Phi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\Phi}$$

Φ ovviamente dipende dai dettagli dell'interazione e, in linea di principio può assumere qualsiasi valore. θ_1 invece a seconda del rapporto $\frac{m_1}{m_2}$ può o non può avere delle limitazioni.

Se $m_1 < m_2$, cioè $v_{CM} < u_1$, θ_1 non ha limitazioni, perchè il denominatore della frazione si può annullare. Se $m_1 \ll m_2$ allora $\tan\theta_1 \simeq \tan\Phi$, ovvero $\theta_1 \simeq \Phi$. Il secondo corpo risente in questo caso molto poco dell'interazione. m_2 si comporta essenzialmente come un centro di scattering fisso.

Se $m_1 > m_2$, cioè $v_{CM} > u_1$, il denominatore non si può annullare e θ_1 ha un valore massimo θ_{MAX}, che si trova facilmente derivando ed imponendo la derivata uguale a zero:

$$1 + \frac{m_1}{m_2}\cos\Phi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tan\theta_{MAX} = \frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \sin\theta_{MAX} = \frac{m_2}{m_1}$$

Se $m_1 \gg m_2$ allora $\theta_{MAX} \simeq 0$. Fisicamente ciò significa che una particella leggera non può deviare significativamente una particella molto più massiva.

Vi è poi il caso particolare $m_1 = m_2$

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\Phi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\Phi} = \frac{\sin\Phi}{1+\cos\Phi} = \tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \theta_1 = \frac{\Phi}{2}$$

L'angolo di scattering di laboratorio è la metà dell'angolo di scattering dal centro di massa. Poichè il valor massimo di Φ è di $180°$ allora se $m_1 = m_2$ l'angolo massimo di scattering nel sistema di laboratorio non può essere altro che di $90°$.

Vediamo ora cosa si può dire su θ_2. Dal diagramma per il moto nel riferimento del centro di massa vediamo subito che:

$$\begin{cases} u'_2 \sin\Phi = v'_2 \sin\theta_2 \\ v'_2 \cos\theta_2 = v_{CM} - u'_2 \cos\Phi \end{cases}$$

Procedendo in modo analogo a prima si ricava:

$$\tan\theta_2 = \frac{u'_2 \sin\Phi}{v_{CM} - u'_2\cos\Phi} = \frac{\sin\Phi}{\frac{v_{CM}}{u'_2} - \cos\Phi}$$

Nel caso del secondo corpo la semplificazione è ora ancora più banale perchè $u'_2 = u_2 = v_{CM}$, per cui, dividendo per u_2:

$$\tan\theta_2 = \frac{\sin\Phi}{1-\cos\Phi} = \cot\frac{\Phi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\theta_2 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Phi}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \theta_2 = \frac{\pi - \Phi}{2}$$

Se $m_1 = m_2 = m$ sappiamo già che:

$$\theta_1 = \frac{\Phi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

Infine presentiamo le espressioni di v'_1 e v'_2 in funzione di v_1 e di Φ.

$$\begin{cases} v'_1 &= \frac{v_1}{M}\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\Phi} \\ v'_2 &= \frac{2m_1}{M} v_1 \sin\frac{\Phi}{2} \end{cases}$$