Moto dei pianeti

Giuseppe Dalba

Sommario

Questi appunti riguardano il moto dei pianeti, come caso particolare del moto di una particella di massa m in un campo di forze centrali $U(r)$, note le condizioni iniziali $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$.

Studieremo il moto in un sistema di riferimento inerziale supponendo che la sorgente del campo, di massa M, sia fissa nell'origine del sistema. Nel caso del moto dei pianeti ciò equivale a supporre il sole fermo ed i pianeti in moto rispetto ad esso. In prima approssimazione, se $M \gg m$, la sorgente del campo può essere ritenuta ferma rispetto alla "particella". Nel caso del sistema Sole-Terra questa ipotesi è verosimile in quanto $M/m \simeq 2\cdot 10^{30}/6\cdot 10^{24} \simeq 0.33\cdot 10^6$.

Troveremo che le orbite dei pianeti sono sempre delle coniche. In particolare sono ellissi, parabole od iperboli a seconda che l'energia totale H sia negativa, nulla o positiva.

1 Moto di una particella in un campo di forze centrali

Cominciamo a studiare il problema dal punto di vista più generale possibile, richiedendo solo che il campo di forza sia centrale. In questo caso esso ha simmetria sferica, per cui è più conveniente esprimere il moto in coordinate polari (r, ϑ, φ). La figura 1 introduce le convenzioni che useremo per le coordinate. Il nostro obiettivo è determinare le equazioni orarie, ovvero le funzioni del tempo $r(t)$, $\vartheta(t)$ e $\varphi(t)$, cosí come la traiettoria. Per far questo applicheremo i principi di conservazione dell'energia meccanica e del momento angolare. Un campo di forze centrali è conservativo, per cui l'energia meccanica H della particella, data dalla somma dell'energia cinetica T e dell'energia potenziale $U(r)$,

$$H = T + U(r), \tag{1}$$

rimane costante nel tempo. Il suo valore è determinato dalle condizioni iniziali su posizione e velocità, ovvero dai valori $\vec{r}_0 = \vec{r}(t=0)$ e $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$, e vale

$$H = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(r_0) \qquad \text{(costante)}.$$

In un campo di forze centrali anche il momento angolare è conservato, quindi anche il suo valore dipende solo dalle condizioni iniziali. La sua definizione è

$$\vec{L} = \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0 = L\hat{u}_L \qquad \text{(costante)}.$$

La conservazione di $\vec{L}$ implica che sono costanti nel tempo sia il suo modulo L che la sua direzione $\hat{u}_L$, ovvero che il moto è piano. In termini delle coordinate polari ciò implica che

$$\varphi(t) = \varphi_0 \qquad \text{(costante)},$$

pertanto la traiettoria della particella giace sul piano normale alla direzione del momento angolare (vedere figura 1). Fissato φ_0, la traiettoria può essere espressa come una funzione della sola coordinata angolare ϑ; nel seguito la indicheremo semplicemente come $r(\vartheta)$.

Cominciamo col determinare l'equazione oraria $r(t)$. Decomponiamo la velocità della particella in velocità radiale $\vec{v}_r$ e normale $\vec{v}_\vartheta$,

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\vartheta = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\vartheta}\hat{u}_\vartheta,$$

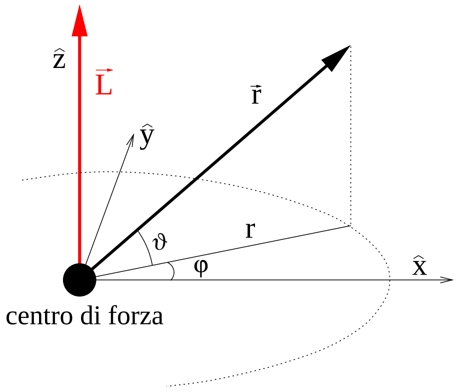

Figura 1: Convenzioni per l'uso delle coordinate. Il centro della forza è situato nell'origine, sia in coordinate polari che cartesiane. L'asse $\hat{z}$ è diretto lungo il momento angolare relativo; siccome esso è costante nel tempo per un moto in un campo centrale, il riferimento che scegliamo è inerziale. In particolare il moto rimane sempre nel piano ($\vartheta = 0$ e $z = 0$ ad ogni istante nel tempo). Le trasformazioni fra coordinate polari e cartesiane saranno: $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ed $\varphi = \arctan(y/x)$.

dove $\hat{u}_r$ ed $\hat{u}_\vartheta$ rappresentano, rispettivamente, il versore radiale e quello normale, ed $\dot{r}$ e $\dot{\vartheta}$ sono le derivate rispetto al tempo delle funzioni $r(t)$ e $\vartheta(t)$. L'energia cinetica T della particella può allora essere riscritta come la somma di due termini: quello radiale T_r, e quello normale T_ϑ (ciò non significa ovviamente che l'energia sia un vettore!). L'espressione di T diventa

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\vartheta}^2 = T_r + T_\vartheta,$$

con $T_r = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$ e $T_\vartheta = \frac{1}{2}mr^2\dot{\vartheta}^2$. L'ultimo termine può essere espresso in funzione del modulo del momento angolare L. Infatti

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m\left(\vec{v}_r + \vec{v}_\vartheta\right) = \vec{r} \times m\vec{v}_r + \vec{r} \times m\vec{v}_\vartheta = \vec{r} \times mr\dot{\vartheta}\hat{u}_\vartheta.$$

Il termine contenente $\vec{r} \times \vec{v}_r$ è stato eliminato siccome $\vec{r} \parallel \vec{v}_r$; inoltre essendo $\vec{r} \perp \hat{u}_\vartheta$, si ha che

$$L = mr^2\dot{\vartheta}. \tag{2}$$

Sostituendo ora $r^2\dot{\vartheta}$ in T_ϑ si ricava

$$T_\vartheta = \frac{L^2}{2mr^2}.$$

È importante osservare che T_ϑ dipende esclusivamente da r e, come tale, rappresenta un'energia di posizione; a causa di ciò viene denominato anche *potenziale centrifugo*. In definitiva l'energia cinetica totale è

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}. \tag{3}$$

È interessante, a questo punto, chiedersi come mai compaia l'aggettivo *centrifugo*, tipico di un sistema di riferimento non inerziale, quando, invece, abbiamo cominciato i nostri calcoli da osservatori inerziali. Di fatto, nel determinare T_ϑ attraverso la costante del moto L ci siamo sbarazzati della variabile di posizione ϑ, fino ad esprimere l'energia cinetica totale T in funzione della sola variabile di posizione r. Ci siamo cosí ritrovati come osservatori non inerziali in un sistema di riferimento solidale al raggio vettore $\hat{u}_r$. Derivando T_ϑ rispetto ad r e cambiando di segno si ottiene infatti il valore della forza centrifuga. Ritorniamo al calcolo dell'equazione oraria $r(t)$. Sostituendo l'equazione 3 nella 1 si ha

$$H = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \left[\frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \right]. \tag{4}$$

Il termine tra parentesi quadre, che giocherà un ruolo importante nella descrizione del moto, è un'energia di posizione che prende il nome di energia potenziale efficace U_{eff}:

$$U_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r). \tag{5}$$

1.1 Moto in un potenziale coulombiano

Esplicitiamo ora $U(r)$ nella forma dell'energia potenziale gravitazionale

$$U(r) = -\gamma \frac{mM}{r} = -\frac{k}{r}, \tag{6}$$

dove M è la massa del centro di forza situato nell'origine O (vedere figura 1). Per brevità è stato posto $k = \gamma mM$ con $\gamma \simeq 6.67 \cdot 10^{-11} \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$. In figura 2 è riportato il grafico dell'energia potenziale efficace U_{eff} (equazione 5) per il potenziale gravitazionale $U(r)$ (equazione 6).

I risultati che troveremo per il potenziale gravitazionale potranno essere estesi all'interazione coulombiana tra una carica $+Q$, centro di forza, situata in O ed una carica di segno opposto $-q$ in moto relativo. Anche in questo caso il potenziale è del tipo $U(r) = -k/r$, dove però $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Qq$ con $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \mathrm{Nm}^2$. Dall'equazione 4 possiamo ricavare

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(H - \frac{L^2}{2mr^2} - U(r) \right)}. \tag{7}$$

Dei due segni prenderemo quello positivo; questa scelta corrisponde ad imporre una condizione iniziale: il verso di rotazione della massa m.

Poichè $\dot{r}$ risulta solo funzione della variabile r, al fine di ricavare $r(\vartheta)$ è sufficiente osservare che

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{dr/dt}{d\vartheta/dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{\vartheta}}. \tag{8}$$

Infatti, sostituendo le equazioni 2 e 7, nonchè la legge dinamica 6, nella 8 si trova

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\vartheta}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{m}\left(H - L^2/2mr^2 + k/r\right)}}{L/mr^2}.$$

Risolvendo rispetto a $d\vartheta$, dopo qualche semplice passaggio algebrico si ottiene

$$d\vartheta = \frac{Ldr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m}\left(H - L^2/2mr^2 + k/r\right)}} = \frac{dr}{r\sqrt{\frac{2mH}{L^2} r^2 + \frac{2km}{L^2} r - 1}}.$$

La formula precedente si semplifica notevolmente se raggruppiamo le costanti del moto ponendo $a = 2mH/L^2$, $b = 2mk/L^2$ e $c = -1$:

$$d\vartheta = \frac{dr}{r\sqrt{ar^2 + br + c}}. \tag{9}$$

Osserviamo che, poichè L ed H sono costanti, a e b non dipendono da r. Integrando entrambi i membri dell'equazione 9 (l'integrale del secondo membro si può trovare tabulato sulla maggior parte delle tavole di integrali) si ottiene

$$\arcsin\left(\frac{br/2 + c}{r\sqrt{b^2/4 - ac}} \right) = \vartheta - \vartheta_0. \tag{10}$$

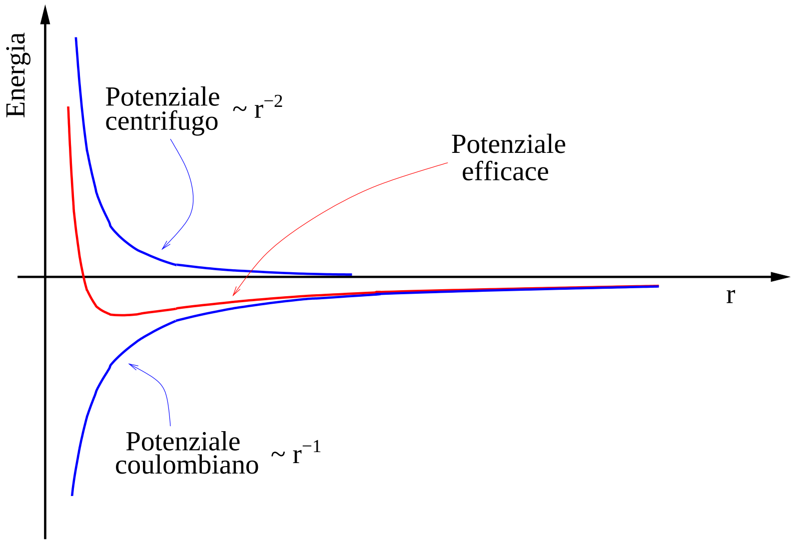

Figura 2: Grafico qualitativo del potenziale efficace nel caso coulombiano attrattivo. Il potenziale centrifugo è positivo e cresce come r^{-2}, mentre il potenziale coulombiano solo come r^{-1}. Quindi per piccole distanze prevale l'effetto centrifugo, per grandi quello coulombiano; a distanza intermedie si forma allora una "buca di potenziale".

La costante di integrazione ϑ_0 è determinata dalla posizione angolare iniziale. Sostituendo nella soluzione 10 i valori di a, b e c, dopo una semplice manipolazione algebrica e l'inversione della funzione arcoseno, abbiamo

$$\sin(\vartheta - \vartheta_0) = \frac{mkr - L^2}{r\sqrt{m^2k^2 + 2mHL^2}}.$$

Risolvendo rispetto ad r si ottiene la dipendenza di r da ϑ:

$$r(\vartheta) = \frac{L^2/mk}{1 - \sqrt{1 + \frac{2HL^2}{mk^2}}\sin(\vartheta - \vartheta_0)}. \tag{11}$$

Vogliamo ora riscrivere questa uguaglianza in una forma più semplice. Calcoliamo il valore di $r(\vartheta)$ per $\vartheta = \vartheta_0$ e chiamiamolo ρ. Il seno si annulla ed otteniamo

$$r(\vartheta_0) = \frac{L^2}{mk} = \rho. \tag{12}$$

Abbiamo visto che la conoscenza delle condizioni iniziali implica la conoscenza di L e quindi di ρ. Siamo liberi di assumere il valore iniziale $\vartheta_0 = -\pi/2$; questo implica che $\sin(\vartheta - \vartheta_0) = \sin(\vartheta + \pi/2) = -\cos\vartheta$. Poniamo ancora

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2HL^2}{mk^2}}. \tag{13}$$

In questo modo l'equazione 11 si riscrive come

$$r(\vartheta) = \frac{\rho}{1 + \varepsilon\cos\vartheta}. \tag{14}$$

Questa è l'equazione di una *conica* in coordinate polari. ε è detta *eccentricità* della conica. A decidere di che tipo di conica si tratta è il valore di ε che, a sua volta, è determinato da H ed L

(equazione 13) e quindi dalle condizioni iniziali. A questo punto può essere comodo passare alle coordinate cartesiane; dalla figura 1 si deduce che

$$x = r\cos\vartheta \qquad y = r\sin\vartheta.$$

Sostituendo x ed y nell'equazione 14, considerando che $r = \sqrt{x^2+y^2}$, dopo elementari manipolazioni, si trova

$$x^2\left(1-\varepsilon^2\right) + 2\varepsilon\rho x + y^2 = \rho^2, \tag{15}$$

che è l'equazione di una conica in coordinate cartesiane. Esistono tre possibilità:

$$\begin{array}{rl} \varepsilon > 1 & \text{per le orbite iperboliche;} \\ \varepsilon = 1 & \text{per le orbite paraboliche;} \\ 0 \le \varepsilon < 1 & \text{per le orbite ellittiche.} \end{array}$$

Il caso $L = 0$ (cioè $\rho = 0$ ed $\varepsilon = 1$) corrisponde ad un'orbita rettilinea nella direzione del centro di forza: la particella cade verso il centro di forza secondo una linea retta avente la stessa direzione di $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$. Nel seguito escluderemo questa possibilità.

Orbite iperboliche: nel caso che l'energia sia positiva ed il momento angolare non sia nullo (cioè $H > 0$ ed $L \neq 0$) si ha $\varepsilon > 1$, ovvero $1-\varepsilon^2 < 0$. Poniamo allora $1-\varepsilon^2 = -A$, con A positivo; l'equazione 15 diventa

$$-Ax^2 + 2\varepsilon\rho x + y^2 = \rho^2.$$

In questa equazione i coefficienti dei termini quadratici x^2 e y^2 sono diversi e di segno opposto: si tratta dell'equazione di un'iperbole. In figura 3-a) (tratto continuo) è riportato il grafico di un'iperbole avente $\varepsilon = 1.2$ e $\rho = 1$. Il centro di forza è posto nell'origine.

Orbite paraboliche: nel caso che l'energia sia nulla ed il momento angolare non sia nullo (cioè $H = 0$ ed $L \neq 0$) si ha $\varepsilon = 1$. In questo caso l'equazione 15 diventa semplicemente

$$x = \frac{1}{2\rho}(\rho^2 - y^2),$$

che è l'equazione di una parabola. In figura 3-a) (tratteggio) è riportato il grafico di una parabola con $\varepsilon = 1$ e $\rho = 1$.

Orbite ellittiche e circolari: nel caso che l'energia sia negativa ed il momento angolare non sia nullo (cioè $H < 0$ ed $L \neq 0$) si ha $0 \le \varepsilon < 1$. In questo caso l'equazione 15 assume la forma

$$+Bx^2 + Cx + y^2 = \rho^2,$$

con $B = 1-\varepsilon^2 > 0$ e $C = 2\varepsilon\rho$. In questa equazione i coefficienti dei termini quadratici x^2 e y^2 sono di ugual segno: si tratta dell'equazione di un'ellisse. Nel caso in cui

$$H = -\frac{mk^2}{2L^2}$$

si ha esattamente $\varepsilon = 0$, e l'equazione 15 si riduce a quella di una circonferenza:

$$y^2 + x^2 = \rho^2.$$

In figura 3-b) sono riportati i grafici di ellissi aventi $\rho = 1$ e differenti valori di ε; uno dei due fuochi è nell'origine degli assi. Ad $\varepsilon = 0$ corrisponde l'orbita circolare (curva tratteggiata a piccoli tratti), ad $\varepsilon = 0.017$ un'orbita con la stessa eccentricità di quella terrestre (curva continua). Si osservi come sia difficile distinguere l'orbita della terra dall'orbita circolare! Ad $\varepsilon = 0.25$ corrisponde un'orbita con la stessa eccentricità di quella del pianeta Plutone (curva tratteggiata

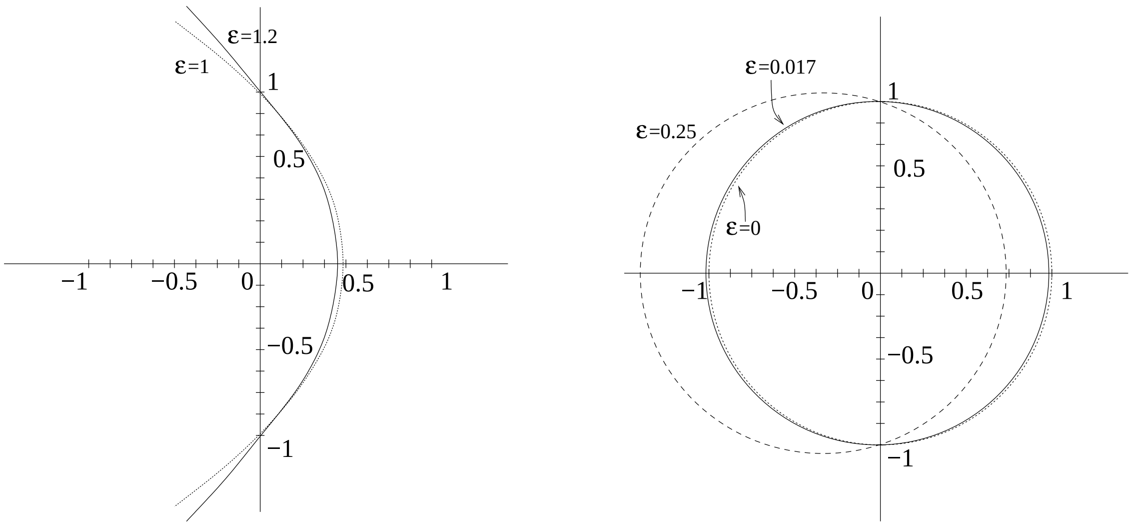

Figura 3: **Parte a)** sono rappresentate un iperbole (tratto continuo, $\varepsilon = 1.1$) ed una parabola (tratteggiata, $\varepsilon = 1$). **Parte b)** sono rappresentate una circonferenza (tratteggio fine, $\varepsilon = 0$), e due ellissi con eccentricità diversa (tratto continuo, $\varepsilon = 0.017$ e tratteggio largo, $\varepsilon = 0.25$). Tutte queste coniche corrispondono all'equazione $x^2(1-\varepsilon^2) + 2\varepsilon\rho x + y^2 = \rho^2$ con $\rho = 1$, quindi passano tutte per i punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

a tratti lunghi). Nel sistema solare il pianeta con la più piccola eccentricità è Nettuno ($\varepsilon = 0.004$) e quello con la più grande è Plutone.

In figura 4-b sono riportate le orbite dei pianeti esterni alla terra nel sistema solare e l'orbita della cometa Halley; questa presenta un'eccentricità molto più alta di tutti i pianeti del sistema solare ($\varepsilon \simeq 0.9$).

I casi relativi alle possibili orbite del moto in un campo gravitazionale, aventi stesso momento angolare L (quindi stesso valore per la ρ, vedere equazione 12) e diversa energia totale H, sono riassunti in figura 5 attraverso il diagramma dell'energia potenziale efficace $U_{\mathit{eff}}(r)$.

1.2 Moto dei satelliti

Le conclusioni precedenti possono essere applicate anche ai satelliti di un pianeta; in questo caso il pianeta gioca il ruolo di centro della forza. Supponiamo di voler lanciare in orbita attorno alla Terra un satellite, ad una distanza r_0 dal centro della Terra. La velocità iniziale del satellite $\vec{v}_0$ sia diretta ortogonalmente al raggio vettore $\vec{r}_0$ che ne individua la posizione iniziale. Ci chiediamo quale deve essere il valore di v_0 affinché il satellite percorra un'orbita circolare e quale il valor minimo di v_0 affinché esso abbandoni per sempre la Terra.

Orbita circolare: la condizione per l'orbita circolare si ricava dalla seconda legge di Newton, imponendo che l'accelerazione gravitazionale eguagli quella centrifuga. Indicando con m la massa del satellite, con M quella della Terra e con v_C il valore di v_0 determinato da questa uguaglianza, si ha

$$m\frac{v_C^2}{r_0} = \gamma\frac{mM}{r_0^2}, \qquad \Rightarrow \qquad v_C = \sqrt{\gamma\frac{M}{r_0}}.$$

Orbita parabolica: la minima velocità iniziale v_P che vedrebbe la massa m allontanarsi per sempre dalla Terra è quella che dà luogo ad un'orbita parabolica. Essa si ottiene imponendo che

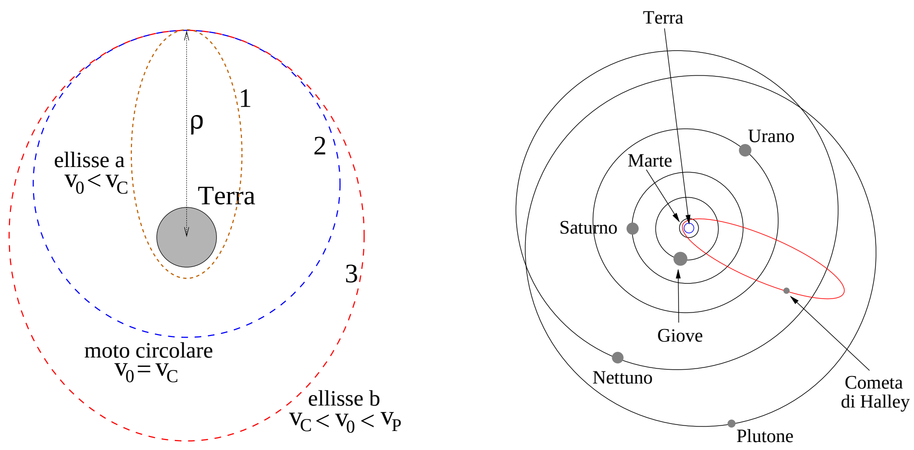

Figura 4: **Parte a** Sono mostrate le diverse orbite per satelliti terrestri corrispondenti ai casi 1, 2 e 3 di figura 5. La curva 1 corrisponde al caso $v_0 < v_C$, in cui la posizione iniziale ρ (equazione 12) coincide con l'afelio. La curva 2 corrisponde al moto circolare. La curva 3 corrisponde al caso $v_C < v_0 < v_P$, in cui la posizione iniziale ρ (equazione 12) coincide con il perielio. In tutti e tre i casi il valore di ρ e quindi del momento angolare è fissato. **Parte b** Sono rappresentate le orbite dei pianeti del sistema solare esterni alla Terra, assieme alla cometa Halley, che presenta una eccentricità molto maggiore.

l'energia meccanica H sia nulla:

$$H = \frac{1}{2}mv_P^2 - \gamma\frac{mM}{r_0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_P = \sqrt{2\gamma\frac{M}{r_0}} = \sqrt{2}v_C.$$

Il valore v_P corrisponde alla velocità di fuga a partire dalla quota r_0. Se r_0 coincidesse con il raggio della Terra R, si avrebbe $v_P = \sqrt{2\gamma\frac{M}{R}} = \sqrt{2gR} \simeq 11.3\mathrm{Km/s}$. È interessante domandarsi ora quale sia il tipo di orbita per velocità $v_0 > v_P$ e per $v_0 < v_P$.

Orbite iperboliche ed ellittiche: per $v_0 > v_P$ si ha che l'energia è positiva e quindi che le orbite sono di tipo iperbolico (figura 5). Abbiamo trovato che l'energia meccanica è nulla per $v_0 = v_P$ (orbita parabolica) mentre per $v_0 = v_C < v_P$ (orbita circolare) si ha che

$$H = \frac{1}{2}mv_C^2 - \gamma\frac{mM}{r_0} = -\frac{1}{2}\gamma\frac{mM}{r_0} < 0.$$

In generale per $v_0 < v_P$ si ha $H < 0$; ad energie meccaniche negative corrispondono sempre orbite chiuse (figura 5), quindi per

$$v_0 < v_C \qquad \text{e} \qquad v_C < v_0 < v_P$$

il satellite percorre orbite ellittiche. In particolare, per $v_0 < v_C$, il satellite si muove su orbite aventi l'afelio coincidente con la posizione iniziale r_0 (vedi figura 5 curva 1, parte spessa) mentre e per $v_C < v_0 < v_P$ il satellite percorre orbite ellittiche con la posizione iniziale coincidente con il perielio (vedi figura 5 curva 3, parte spessa). In figura 5 sono mostrate le curve di energia potenziale efficace $U_{eff}(r)$ (vedere anche la figura 2) ottenute per i differenti valori di v_0. Al crescere di v_0 e quindi di $L = mr_0v_0$, l'energia centrifuga $L^2/2mr_0^2$ aumenta mentre $U(r)$ resta invariata; ne consegue che le curve del potenziale efficace $U_{eff}(r)$ si spostano verso l'alto. Ad ogni curva corrisponde una diversa traiettoria: alla curva 2, corrisponde la traiettoria circolare, alla curva 4 quella parabolica, alle curve 1 e 3 traiettorie ellittiche e alla curva 5 quella iperbolica. Le diverse orbite sono riportate in figura 4-a.

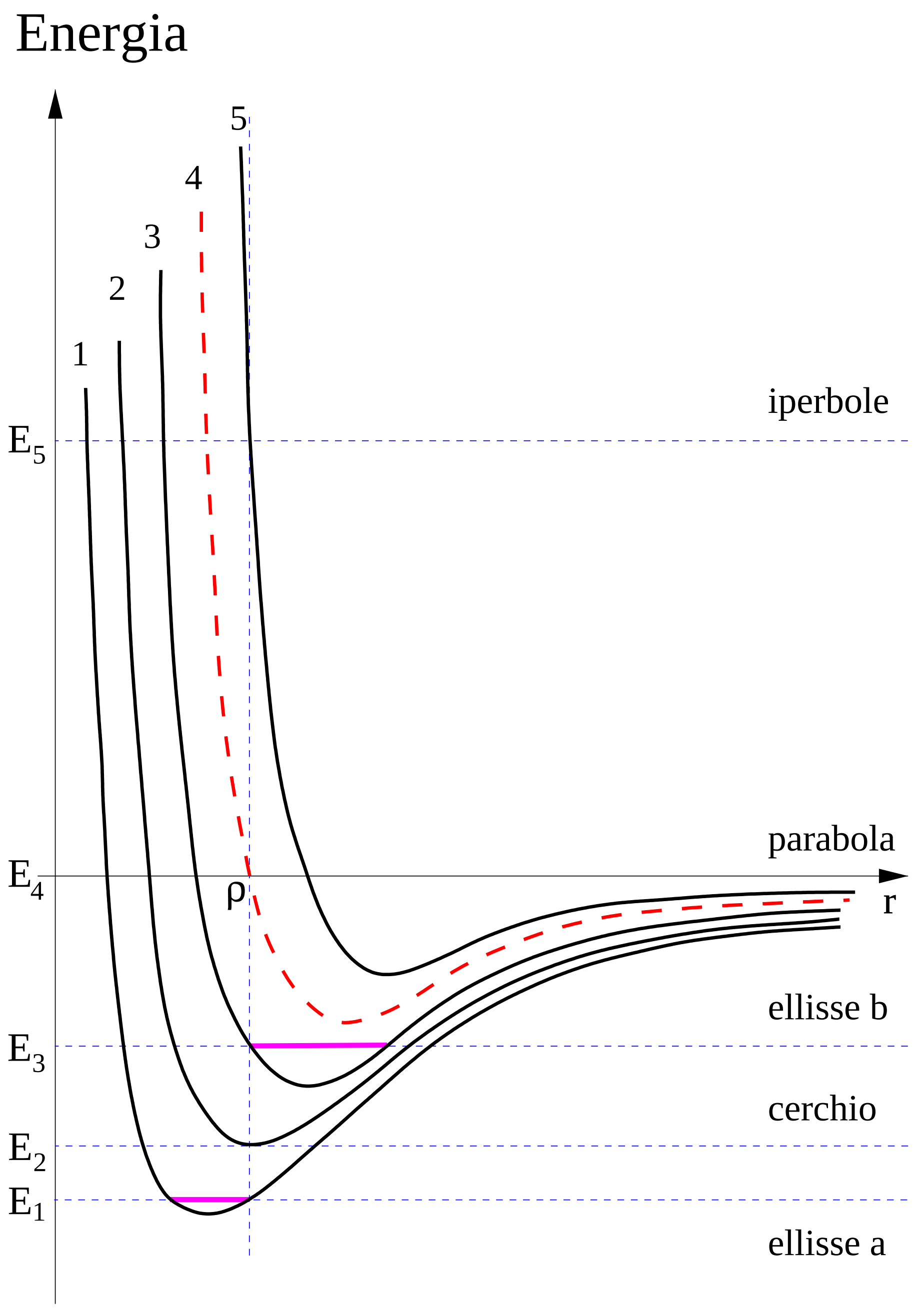

Figura 5: Moto dei satelliti: **Curva 1** $v_0 < v_C$, moto ellittico, la posizione iniziale ρ (equazione 12) coincide con l'afelio (linea magenta in grassetto), ellisse a nella figura 4-a. **Curva 2** $v_0 = v_C$, moto circolare. **Curva 3** $v_C < v_0 < v_P$, moto ellittico, la posizione iniziale ρ (equazione 12) coincide con il perielio (linea magenta in grassetto), ellisse b nella figura 4-a. **Curva 4** $v_0 = v_P$, moto parabolico. **Curva 5** $v_0 > v_P$, moto iperbolico.
I segmenti orizzontali tratteggiati rappresentano l'energia totale H, essi sono numerati da 1 a 5 come le corrispondenti curve di energia potenziale efficace; il segmento numero 4 (moto parabolico) coincide con l'asse delle ascisse, $H = 0$. In tutti i casi il valore di ρ e quindi del momento angolare è fissato.