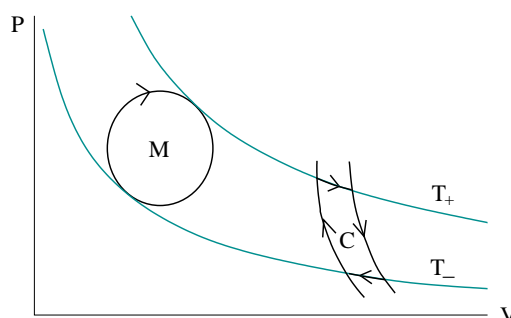


Il teorema di Carnot generalizzato

Giuseppe Dalba

In questi appunti vogliamo dimostrare che il rendimento di una macchina termica che lavori a contatto con infinite sorgenti fra una temperatura massima T_+ ed una minima T_- è sempre minore del rendimento di una macchina di Carnot che lavori nello stesso intervallo di temperatura. Consideriamo il ciclo reversibile M mostrato in figura, che lavora a contatto con un gran numero di sorgenti, la temperatura essendo compresa nell'intervallo $[T_-, T_+]$, ed il corrispondente ciclo C di Carnot.



L'integrale di Clausius (ovvero l'integrale degli scambi di calore divisi per la temperatura a cui avvengono) per il ciclo termodinamico M , che è reversibile per ipotesi, è sicuramente nullo. Possiamo dividere questo integrale in due parti, A e B , nelle quali rispettivamente si assorbe o si cede solo calore:

$$0 = \oint \frac{\omega}{T} = \underbrace{\int_A \frac{|\omega|}{T}}_{\text{assorbimento}} - \underbrace{\int_B \frac{|\omega|}{T}}_{\text{cessione}}$$

Possiamo minorare il primo integrale sostituendo T_+ al posto della temperatura a cui lo scambio di calore avviene. Allo stesso modo possiamo rimpiazzare T nel secondo integrale con T_- ed ottenere un valore più grande. A questo punto le temperature possono essere portate fuori dal segno di integrazione, e $\int \omega$ si riduce semplicemente al calore assorbito Q_+ o ceduto Q_- . Siccome il secondo integrale ha un segno negativo, in entrambi i casi stiamo sottovalutando l'integrale di Clausius, quindi;

$$0 = \oint \frac{\omega}{T} > \frac{|Q_+|}{T_+} - \frac{|Q_-|}{T_-} \quad \Rightarrow \quad \frac{|Q_-|}{T_-} > \frac{|Q_+|}{T_+}$$

Questa relazione ci permette immediatamente di ricavare una disuguaglianza fra il rendimento del ciclo M e quello della corrispondente macchina di Carnot (che è $\eta_C = 1 - T_-/T_+$):

$$\frac{|Q_-|}{|Q_+|} > \frac{T_-}{T_+} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{1 - \frac{|Q_-|}{|Q_+|}}_{\eta_M} < \underbrace{1 - \frac{T_-}{T_+}}_{\eta_C}$$

il che è equivalente a scrivere appunto $\eta_M < \eta_C$, come volevasi dimostrare. Quindi una macchina termica il cui fluido di lavoro subisca un ciclo reversibile scambiando calore con infinite sorgenti a temperatura compresa fra un valore minimo T_- ed uno massimo T_+ ha rendimento inferiore alla macchina di Carnot che utilizza sorgenti fra le stesse temperature estreme. Se la macchina termica M fosse una macchina reale, e pertanto irreversibile, il suo rendimento sarebbe minore di quello della corrispondente macchina reversibile e quindi, a maggior ragione sarebbe minore del rendimento della macchina di Carnot che utilizza le sorgenti a temperatura T_+ e T_- .