Alcuni problemi di meccanica

Giuseppe Dalba

Sommario

Questi appunti contengono cinque problemi risolti di statica e dinamica del punto materiale e dei corpi rigidi. Gli ultimi quattro problemi sono stati proposti nella prova scritta del 17 luglio 2000.

Indice

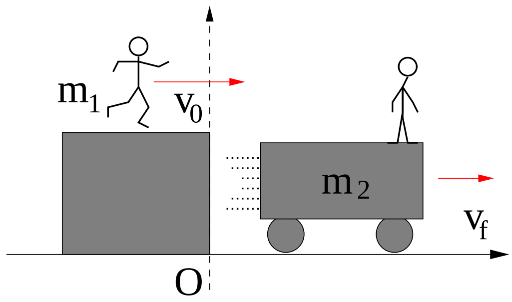
1 Alcuni problemi di meccanica

1.1 Scivolamento su di un carrello con attrito

1.1.1 Testo del problema

Un ragazzo di massa $m_1 = 50$Kg corre su di una banchina a velocità $v_0 = 3$m/s. All'estremità di questa si trova un carrello, di massa $m_2 = 100$Kg, inizialmente a riposo. Il ragazzo salta sul carrello e scivola sulla sua superficie fino a fermarsi. Supponendo trascurabile l'attrito fra il carrello ed il terreno e approssimando g a 10m/s^2, si determini:

- la velocità finale del carrello;
- quanto vale la forza di attrito agente sul ragazzo durante lo scivolamento se il coefficiente di attrito fra le sue scarpe e la superficie del carrello è $\mu = 0.4$;
- qual'è la durata della forza di attrito sul ragazzo e sul carrello;
- di quanto si sposta il ragazzo rispetto al terreno nel momento in cui smette di scivolare sul carrello.



1.1.2 Soluzione

La velocità finale del carrello è determinata dal principio della conservazione della quantità di moto (siccome non vi è attrito fra il carrello ed il terreno). Quindi

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_f \qquad \Rightarrow \qquad v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 = 1\text{m/s}$$

La forza di attrito agente sul ragazzo è $-F_a \hat{x}$ con $F_a = \mu m_1 g = 200$N. La forza agente sul carrello è uguale in modulo e di segno opposto, ovvero $+F_a \hat{x}$. La forza di attrito dinamico agisce sul ragazzo fino a che la sua velocità non è uguale a quella del carrello (ovvero fino a quando ragazzo e carrello non sono fermi l'uno rispetto all'altro): a questo punto entrambi si muoveranno alla velocità v_f prima determinata:

$$F_a \Delta t = |\Delta p| = |m v_f - m v_0| \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = m \frac{|v_f - v_0|}{F_a} = 0,5\text{s}$$

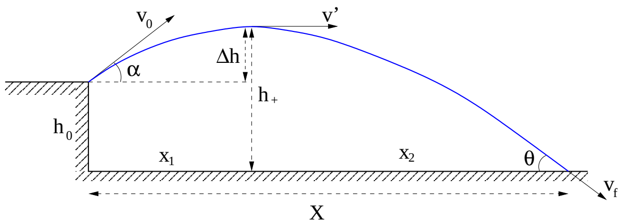
La forza di attrito sul carrello agisce ovviamente per lo stesso tempo, dal momento che in ogni istante è uguale e contraria per via del terzo principio della dinamica. Nell'intervallo di tempo Δt il ragazzo viene decelerato da una forza costante, quindi la sua velocità decresce linearmente nel tempo. La sua velocità media in questo lasso di tempo sarà quindi la media della velocità iniziale e finale; utilizzando questa quantità è possibile calcolare di quanto si sposta mentre scivola sul carrello:

$$\langle v \rangle = \frac{v_f + v_0}{2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x = \Delta t \frac{v_f + v_0}{2} = 1\text{m}$$

1.2 Traiettoria di un proiettile in campo gravitazionale

1.2.1 Testo del problema

Un proiettile viene sparato da una altezza $h_0 = 52\text{m}$ con velocità iniziale $v_0 = 48\text{m/s}$ ed alzo pari ad $\alpha = 36°$. Nel momento in cui il proiettile arriva alla massima altezza rispetto al suolo, esso viene sospinto in avanti da un colpo di vento che ne modifica istantaneamente la velocità di Δv. Nel caso $\Delta v = 0\text{m/s}$ e nel caso $\Delta v = 12\text{m/s}$ si determini:



- la quota massima h_+ raggiunta rispetto al suolo;
- la velocità v_f al momento dell'impatto col suolo e l'angolo di impatto θ;
- il tempo di volo T e la gittata X;

1.2.2 Soluzione

Consideriamo prima il caso semplice in cui il colpo di vento è trascurabile ($\Delta v = 0\text{m/s}$). La quota massima rispetto al suolo si determina a partire dal principio di conservazione dell'energia meccanica: la velocità del proiettile lungo l'asse y diminuisce mentre esso sale secondo la relazione $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta h$; ma in h_+ la velocità lungo $\hat{y}$ è nulla, quindi $\Delta h = {v_{0y}}^2/2g$ da cui:

$$h_+ = h_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} = h_0 + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} = 92,6\text{m}$$

Velocità ed angolo di impatto al suolo possono essere determinati con un ragionamento analogo. La velocità lungo $\hat{y}$ al momento dell'impatto è pari a quella di una caduta libera dall'altezza h_+, ovvero $v_{fy}^2 = 2gh_+$, mentre la velocità lungo $\hat{x}$ è invariata durante tutto il volo. Risulta pertanto:

$$v_f = \sqrt{2gh_+ + (v_0\cos\alpha)^2} = 57,7\text{m/s} \qquad \text{e} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{v_{fy}}{v_{fx}}\right) = 48°$$

Per calcolare il tempo di volo e la gittata dividiamo la traiettoria in due parti: prima di avere raggiunto l'altezza massima (tempo di volo t_1 e spazio percorso x_1) e dopo averla raggiunta fino all'impatto con il suolo (tempo di volo t_2 e spazio percorso x_2). Per quanto riguarda la prima parte, il tempo di salita è quello necessario ad annullare la componente verticale della velocità, quindi:

$$t_1 = \frac{v_0\sin\alpha}{g} = 2,88\text{s} \qquad \text{e} \qquad x_1 = v_{0x}t_1 = 111,8\text{m}$$

Il tempo di caduta a partire dall'altezza massima si ricava considerando un corpo in moto uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla che deve coprire la distanza h_+:

$$0 = h_+ - \frac{1}{2}gt_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = \sqrt{\frac{2h_+}{g}} = 4,34\text{s} \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = v_{0x}t_2 = 164,6\text{m}$$

dove x_2 come prima è stato ricavato considerando un moto uniforme lungo l'asse $\hat{x}$ con la velocità iniziale per il tempo t_2. Il tempo di volo totale risulta quindi $T = t_1 + t_2 = 7,22\text{s}$ e la gittata totale $X = x_1 + x_2 = 276,4\text{m}$.

Passiamo ora al caso $\Delta v \neq 0\text{m/s}$. Quasi tutte le relazioni che sono state trovate sono ancora valide, a patto di sostituire la velocità lungo $\hat{x}$ con $v_{x0}+\Delta v$ dall'istante t_1 in poi. La nuova velocità d'impatto ed il nuovo angolo di impatto sono:

$$v_f = \sqrt{2gh_+ + (v_0\cos\alpha + \Delta v)^2} = 66,3\text{m/s} \qquad \text{e} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{v_{fy}}{v_{fx}}\right) = 40°$$

I tempi di volo non cambiano così come l'altezza massima raggiunta (perchè sono determinati dal moto lungo la verticale, che non è influenzato dal colpo di vento). Lo spazio percorso in orizzontale durante la caduta diventa però:

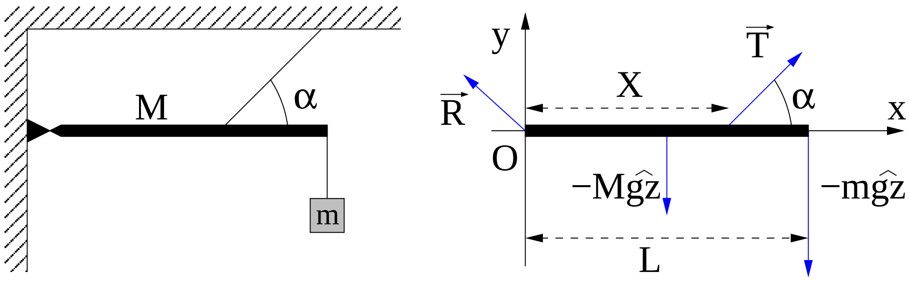
$$x_2 = (v_{0x} + \Delta v)t_2 = 216,7\text{m}$$

per cui la gittata totale ammonta a $X = 328,5$m.

1.3 Analisi statica di un sistema di barre, pesi e funi

1.3.1 Testo del problema

Si consideri una sbarra di massa M e lunghezza L in equilibrio sotto l'azione del peso di una massa m e della reazione vincolare di un perno e di una corda inclinata di un angolo α. La corda si aggancia alla sbarra ad una distanza $X < L$ dal perno, e sopporta una tensione massima $T_{max} = 70N$. Si studino le componenti delle reazioni vincolari e l'angolo di equilibrio minimo, nei casi $X = L$ e $2X = L$.



1.3.2 Soluzione

Ricordiamo le condizioni necessarie per l'equilibrio di un corpo rigido (nel nostro caso sarà la sbarra): la risultante delle forze esterne e la risultante dei momenti esterni si devono annullare.

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_i \vec{\tau}_i|_O = 0$$

Dalle equazioni di equilibrio delle forze decomposte lungo gli assi $\hat{x}$ ed $\hat{y}$ ricaviamo $R_x = -T\cos\alpha$ ed $R_y = Mg + mg - T\sin\alpha$. Dall'equazione per l'equilibrio dei momenti otteniamo poi $TX\sin\alpha = \frac{Mg}{2}L + mgL$. Risolvendo queste equazioni si ottengono le reazioni vincolari:

$$\begin{cases} T &= +T_{min}\sin^{-1}\alpha \\ R_x &= -T_{min}\cot\alpha \\ R_y &= -T_{min} + (M+m)g \end{cases} \qquad \text{con} \qquad T_{min} = (M+2m)\frac{gL}{2X}$$

Da queste soluzioni traiamo qualche conclusione generale. Intanto, R_y non dipende da α, la reazione verticale del perno è indipendente dall'angolo che la corda forma con la sbarra. Inoltre, T è minima per $\alpha = 90°$: $T_{90°} = T_{min}$; per lo stesso angolo R_x si annulla (cioè il perno non è sollecitato in orizzontale se la corda rimane verticale). È interessante anche il limite $\alpha \to 0$, infatti $R_x \to -\infty$ e $T \to \infty$. Infine notiamo che il segno di R_y dipende dalla lunghezza di L rispetto ad X. Nel caso $L = X$ si ha $R_y = -\frac{M+2m}{2}g + (M+m)g = \frac{Mg}{2} > 0$. Nel caso: $L = 2X$ si ha $R_y = -mg < 0$.

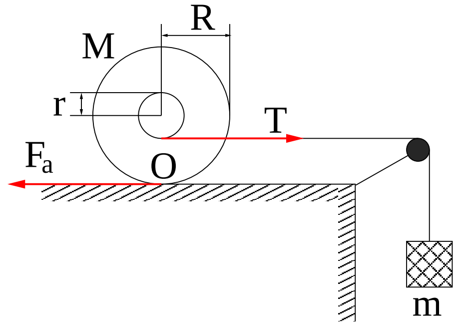
Vediamo infine l'angolo minimo che la corda può sopportare. Sappiamo che il carico di rottura è di 70N, ovvero $T_{max} = 70$N; dalle equazioni precedenti si ricava:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{T_{min}}{T_{max}}\right) \simeq 57°$$

1.4 Rotolamento di un corpo soggetto a trazione

1.4.1 Testo del problema

Un rullo di massa $M = 5$Kg rotola senza strisciare su di un tavolo spinto dal peso di un blocco di massa $m = 2$Kg mediato da una carrucola. Il rullo è cilindrico ma ha sezione variabile; il suo asse è distante R dal tavolo, ma il cavo che trasmette la forza peso è agganciato a distanza $r = R/2$ dall'asse del rullo. Si determini:



- il moto del rullo (la sua accelerazione angolare e lineare);
- la tensione del cavo che lo connette al blocco;
- il valore minimo del coefficiente di attrito che permette il puro rotolamento;

1.4.2 Soluzione

Nell'ipotesi di puro rotolamento, l'equazione del moto per il blocco è $mg - T = ma_m$ mentre per il rullo è $T(R-r) = I_0\alpha$, dove α è l'accelerazione angolare del rullo ed $I_0 = \frac{3}{2}MR^2$ è il suo momento di inerzia, entrambi rispetto al punto di appoggio O. L'accelerazione lineare del blocco è legata all'accelerazione angolare del rullo da $a_m = \alpha(R-r)$:

$$a_m = \frac{T(R-r)^2}{I_0} = (g - a_m)\frac{m(R-r)^2}{I_0}$$

Per semplicità di notazione, poniamo $I_1 = m(R-r)^2$ (I_1 ha le dimensioni di un momento di inerzia). Risolvendo rispetto ad a_m otteniamo:

$$a_m = g\frac{I_1}{I_0 + I_1} = \frac{g}{16} = 0,61 \text{m/s}^2$$

Sostituendo, si ricava la tensione T:

$$T = mg - ma = mg\frac{I_0}{I_0 + I_1} = \frac{15}{16}mg = 18,4\text{N}$$

L'accelerazione lineare dell'asse del rullo è legata alla accelerazione lineare del blocco dalla relazione $a = \frac{R}{R-r}a_m$. Dall'equazione del moto del centro di massa $T - F_a = Ma$ possiamo allora ricavare la forza di attrito:

$$F_a = T - Ma = T\left(1 - \frac{M}{m}\frac{R}{R-r}\frac{I_1}{I_0}\right) = \frac{2}{3}T = 12,3\text{N}$$

Il valore minimo del coefficiente di attrito per il puro rotolamento è determinato dalla condizione $F_a = Mg\mu_{min}$. Conoscendo tutti i termini si ricava facilmente

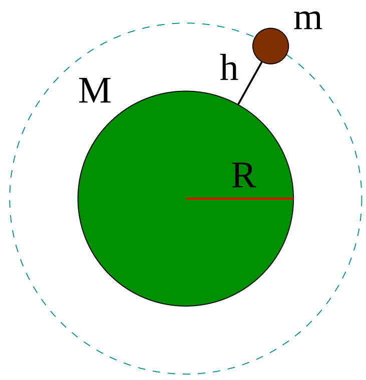
$$\mu_{min} = \frac{F_a}{Mg} = 0,25$$

1.5 Orbitazione di un satellite terrestre

1.5.1 Testo del problema

Un satellite di massa $m = 400$Kg si trova a distanza $h = 2500$Km dalla superficie della terra. Ricordando che approssimativamente il raggio R della terra vale $6 \cdot 10^6$m, la sua massa M vale $6 \cdot 10^{24}$Kg e la costante di gravitazione universale G vale $7 \cdot 10^{-11}$N·m^2/Kg^2, si determini:

- la sua velocità orbitale V per un'orbita circolare e la sua velocità di fuga V_F;
- il momento angolare nel caso che il satellite stia orbitando su di un'orbita circolare;
- l'energia necessaria per spostare il satellite su di un'orbita a distanza doppia dalla terra (cioè $h \to 2h$);
- l'energia necessaria per spostare il satellite su di un'orbita geostazionaria;



1.5.2 Soluzione

La velocità orbitale per un'orbita circolare è determinata dall'equilibrio fra accelerazione centrifuga ed attrazione gravitazionale, ovvero:

$$\frac{V^2}{R+h} = \frac{GM}{(R+h)^2} \qquad \Rightarrow \qquad V = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = 7 \times 10^3 \text{m/s}$$

La velocità di fuga invece si ottiene imponendo che l'energia cinetica sia pari in modulo all'energia potenziale gravitazionale:

$$\frac{1}{2} m V_F^2 = \frac{GmM}{R+h} \qquad \Rightarrow \qquad V_F = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}} = \sqrt{2} V = 9,9 \times 10^3 \text{m/s}.$$

Nel caso di orbita circolare, il momento angolare risulta semplicemente $L = mV(R+h) = 24 \times 10^{12}$Kg·m^2/s, poichè la velocità è ortogonale al vettore posizione. L'energia totale per un satellite orbitante ad altezza h è:

$$E = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{GmM}{R+h} = -\frac{1}{2} \frac{GmM}{R+h}$$

L'energia necessaria per lo spostamento del satellite di un'orbita ad altezza $2h$ è la differenza fra le energie totali nei due casi:

$$\Delta E = -\frac{GmM}{2(R+2h)} + \frac{GmM}{2(R+h)} = \frac{GmMh}{2(R+h)(R+2h)} = 2,2 \times 10^9 \text{J}$$

Per calcolare l'energia necessaria per lo spostamento di m su di un'orbita geostazionaria dobbiamo trovare l'altezza h_S dalla superficie terrestre dell'orbita geostazionaria tramite la relazione $2\pi(R + h_S) = TV_S$ dove T individua il periodo di rotazione del satellite (un giorno) e V_S è la velocità sull'orbita geostazionaria. Si ricava

$$2\pi(R+h_S) = T \sqrt{\frac{GM}{R+h_S}} \qquad \Rightarrow \qquad (R+h_S)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{GM} \frac{T}{2\pi} = 260 \times 10^9 \text{m}$$

da cui $h_S = 36 \times 10^6$m. Applicando quindi lo stesso procedimento di prima ricaviamo:

$$\Delta E = GmM \frac{h_S - h}{2(R+h)(R+h_S)} = 7,9 \times 10^9 \text{J}$$