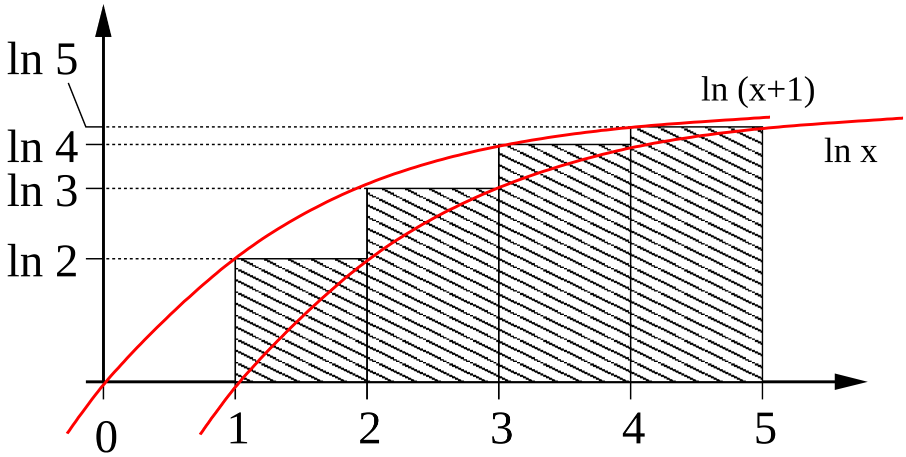
La formula di Stirling

Giuseppe Dalba

In questi appunti vogliamo dimostrare la cosidetta formula di Stirling, che afferma $\ln N! \sim N(\ln N - 1)$, dove $N!$ è il fattoriale di N, ovvero il prodotto dei numeri interi da 1 ad N. Cominciamo col vedere che il logaritmo del fattoriale si può scrivere come la somma dei logaritmi degli interi da 1 ad N:

$$\ln N! = \ln[N(N-1)(N-2)(N-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1] =$$
$$= \ln N + \ln(N-1) + \ln(N-2) + \ln(N-3) + \cdots + \ln 3 + \ln 2 + \ln 1$$

La sommatoria corrisponde all'area della superficie tratteggiata in figura (per il caso $N = 5$). La nostra strategia sarà di approssimare questa figura con delle curve continue e di utilizzare l'integrazione delle curve per avere una stima dell'area. Notiamo che nell'intervallo $[1, N]$ le curve $\ln(x+1)$ e $\ln x$ sono sempre in valore superiori o inferiori rispettivamente alla figura tratteggiata:



Possiamo allora concludere che gli integrali di queste curve fra 1 ed N sono dei limiti superiori ed inferiori alla nostra sommatoria:

$$A = \int_1^N \ln x \, dx \leq \ln N! \leq \int_1^N \ln(x+1)\, dx = B$$

Gli integrali si possono facilmente risolvere per parti. Infatti $\int_a^b \ln x\, dx = [x \ln x - x]_a^b$, quindi:

$$A = \int_1^N \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^N = N \ln N - N + 1 = N(\ln N - 1) + 1$$
$$B = \int_1^N \ln(x+1)\, dx = [y \ln y - y]_2^{N+1} = (N+1)\ln(N+1) - (N+1) - 2\ln 2 + 2$$

sia A che B valgono dunque $N(\ln N - 1)$ a meno di termini che diventano infinitesimi rispetto ad N quando $N \gg 1$. In termini più formali:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A - N(\ln N - 1)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{B - N(\ln N - 1)}{N} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ln N! = N(\ln N - 1 + o(N))$$